ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 7, ФИЛОСОФИЯ. 1994. № 1

Я. В. Шрамко

РЕЛЕВАНТНОЕ СЛЕДОВАНИЕ СОХРАНЯЕТ НЕ-ЛОЖНОСТЬ (ЧИСТО СЕМАНТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО)

> ...достаточно рассматривать сохранение истинности, так как если некоторый вывод не всегда сохраняет не-ложность, то, как это может быть показано с помощью несложных технических приемов, он также не может сохранить истинность
>
> *Н. Д. Белнап, младший*

В семантике обобщенных описаний состояний Е. К. Войшвилло[1] отношение релевантного логического следования для классической логики высказываний определяется следующим образом:

(1) $A \underset{rel}{\models} B \Leftrightarrow \forall a\,(a \in M)\,(TA/a \Rightarrow TB/a)$,

где M — множество обобщенных описаний состояний (об. о. с.).

Существенной особенностью данной семантики (как семантики, построенной в сущности по «американскому плану») является использование значений «истина» (T) и «ложь» (F) в качестве самостоятельных, равноправных, независимых (суверенных!) истинностных значений. При этом даются следующие определения условий истинности и ложности для отрицания:

(2) $T \sim A/a \Leftrightarrow FA/a$;

$F \sim A/a \Leftrightarrow TA/a$.

По существу из определения (1) видно, что отношение релевантного следования обладает свойством сохранять истинность. Однако можно показать (я бы даже сказал более того — доказать, причем не используя никаких средств помимо имеющихся семантических определений), что оно также имеет свойство сохранять неложность. Таким образом, нет никакой нужды дополнительно постулировать данное, очень важное и нужное свойство[2].

ЛЕММА 1. Пусть мы имеем произвольное об. о. с. a. Преобразуем его в другое об. о. с. b в соответствии со следующими условиями:

для всякого p

(I) $p \in a$ и $\sim p \notin a \Rightarrow$ $p \in b$ и $\sim p \notin b$

(II) $p \notin a$ и $\sim p \in a \Rightarrow$ $p \notin b$ и $\sim p \in b$

(III) $p \in a$ и $\sim p \in a \Rightarrow$ $p \notin b$ и $\sim p \notin b$

(IV) $p \notin a$ и $\sim p \notin a \Rightarrow$ $p \in b$ и $\sim p \in b$.

Тогда для этого об.о.с. и для любой формулы A выполняются следующие условия:

---

[1] См.: Войшвилло Е. К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.

[2] Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру//Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981. С. 224.

(I)′ TA/a и не FA/a ⇒ TA/b и не FA/b

(II)′ не TA/a и FA/a ⇒ не TA/b и FA/b

(III)′ TA/a и FA/a ⇒ не TA/b и не FA/b

(IV)′ не TA/a и не FA/a ⇒ TA/b и FA/b.

Доказательство: Индукцией по длине формулы A. Если A есть пропозициональная переменная, то лемма тривиально верна в силу определения условий истинности и ложности для переменных.

Приведем здесь доказательство случая, когда A имеет вид ∼B. В этом случае индуктивное предположение состоит в том, что для B лемма верна. Имеем:

(I)′ T∼B/a и не F∼B/a ⇒ FB/a и не TB/a (в соответствии с (2)) ⇒ ⇒ FB/b и не TB/b (по индуктивному предположению) ⇒ T∼B/b и не F∼B/b (по (2)).

(II)′ не T∼B/a и F∼B/a ⇒ не FB/a и TB/a (по (2)) ⇒ не FB/b и TB/b (инд. предп.) ⇒ не T∼B/b и F∼B/b (по (2)).

(III)′ T∼B/a и F∼B/a ⇒ FB/a и TB/a (по (2)) ⇒ не FB/b и не TB/b (инд. предп.) ⇒ не T∼B/b и не F∼B/b (по (2)).

(IV)′ не T∼B/a и не F∼B/a ⇒ не FB/a и не TB/a (по (2)) ⇒ FB/b и TB/b (инд. предп.) ⇒ T∼B/b и F∼B/b (по (2)).

Случаи, когда A имеет вид B & C или B∨C доказываются аналогично. Лемма доказана.

Смысл данной леммы заключается в следующем: если в произвольном об. о. с. любое «нормальное» вхождение переменных оставить без изменения, а всякое «противоречие» заменить на «пустоту» и наоборот, то истинностные значения всех формул в данном об. о. с. изменятся (или не изменятся) аналогичным образом.

Из леммы 1 непосредственно «вытекает» следующее:

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякого об. о. с. a существует об. о. с. b такое, что для любой формулы A выполняются условия (I)′—(IV)′ из леммы 1.

Теперь можем доказать еще одну лемму:

ЛЕММА 2. Для любых формул A и B,

∃a (не FA/a и FB/a) ⇔ ∃b (TA/b и не TB/b).

Доказательство:

I. Слева направо:

Пусть ∃a (не FA/a и FB/a). Тогда для этого a возможны следующие (оставшиеся) четыре случая распределений истинностных значений формул A и B:

1. не FA/a и TA/a и FB/a и не TB/a. Тогда лемма тривиально верна.
2. не FA/a и не TA/a и FB/a и не TB/a. Тогда в силу следствия 1 существует об.о.с. b такое, что FA/b и TA/b и FB/b и не TB/b. Лемма верна.
3. не FA/a и TA/a и FB/a и TB/a. Тогда по следствию 1 существует b такое, что не FA/b и TA/b и не FB/b и не TB/b. Лемма верна.
4. не FA/a и не TA/a и FB/a и TB/a. Тогда по следствию 1 существует об.о.с. b такое, что FA/b и TA/b и не FB/b и не TB/b. Лемма верна.

II. Справа налево. Доказательство предоставляется читателю, поскольку оно аналогично предыдущему.

Лемма доказана.

Теперь, дважды (туда и сюда) использовав контрапозицию, имеем следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых A и B

$$\forall a\,(a \in M)\,(TA/a \Rightarrow TB/a) \Leftrightarrow \forall a\,(a \in M)\,(FB/a \Rightarrow FA/a).$$

Руководствуясь данным следствием, не представляет никакого труда установить, что определенное посредством (1) отношение релевантного логического следования обладает следующим свойством:

$$(3)\quad A \underset{rel}{\models} B \Leftrightarrow \forall a\,(a \in M)\,(FB/a \Rightarrow FA/a)$$

или эквивалентными ему:

$$(3)'\quad A \underset{rel}{\models} B \Leftrightarrow \forall a\,(a \in M)\,(\text{не } FA/a \Rightarrow \text{не } FB/a).$$

Иными словами, наличие у релевантного следования свойства сохранять истинность влечет наличие у него свойства сохранять не-ложность (и наоборот!). Данное обстоятельство существенно для обоснования контрапозитивности отношения релевантного логического следования:

$$(4)\quad A \underset{rel}{\models} B \Leftrightarrow \sim B \underset{rel}{\models} \sim A.$$

Тем приятнее был процесс открытия этого свойства, пусть даже во второй раз.