

Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели*

Я.В. Шрамко

Криворожский государственный педагогический университет
Кафедра философии
50086 Кривой Рог, Украина
kff@kpi.dp.ua¹

1. Семантика по “Американскому плану”

Хорошо известно, что в классической логике логически истинное высказывание следует из произвольного утверждения, а из логически ложного утверждения следует какое угодно высказывание. Эти принципы часто называют “парадоксами (классического) отношения следования”, поскольку считается, что они противоречат некоторым базисным интуитивным представлениям о природе этого отношения. Различными исследователями были предложены многообразные стратегии преодоления (элиминации) данных парадоксов. За одной из таких стратегий в литературе закрепилось название “Американский план”. Само это название, равно как и параллельный ярлык “Австралийский план”, были введены в оборот Р. Мейером, их можно встретить уже в работе [Meyer 1978]. Посредством такого рода “националистической” терминологии Мейер противопоставляет семантику *австралийца* Р. Роутли, который при определении условий истинности связки отрицания использует специальную операцию типа “звездочка”, подходу *американцев* Д.М. Данна и Н. Белнапа, определяющих отрицание обычным (классическим) образом. Впрочем, сохранение стандартного определения отрицания имеет свою цену и происходит в последнем случае за счет отказа от некоторых базисных принципов классической логики, а именно, принципов бивалентности и однозначности (восходящих еще к Аристотелю). В соответствии с принципом бивалентности, имеется всего два истинностных значения – “истина” и “ложь”, при этом, всякое высказывание обязательно принимает какое-то из этих двух значений; принцип же однозначности утверждает, что всякое высказывание может принимать *только одно* из этих значений. Именно в отказе от данных принципов и заключается основная идея семантик, построенных в соответствии с Американским планом, где высказывания могут принимать не только обычные

* *Online Journal LOGICAL STUDIES No.5 (2000) ISBN 5-85593-141-2*

¹Статья написана в рамках исследовательского проекта по программе академических обменов имени *Фулбрайта* и является продолжением серии статей, начатой в [Shramko 2000]. Я благодарен программе *Фулбрайт* за поддержку моих исследований.

значения “истина” или “ложь”, но также одновременно иметь оба эти значения, или же не иметь никакого. Эта идея была выдвинута Данном в 1966 году в его диссертации [Dunn 1966], а затем развита им в ряде докладов и статей (см., напр., [Dunn 1971], [Dunn 1976], а также подробное обсуждение (и обобщение) данной темы в [Dunn 1999], [Dunn 2000]).²

В классической логике соблюдение принципов бивалентности и однозначности достигается за счет использования классической *функции истинности* (истинностной функции, функции истинностной оценки), отображающей множество высказываний во множество истинностных значений $\{T, F\}$. Данная функция является всюду определенной. Таким образом, она приписывает каждому высказыванию какой-нибудь (и только один) элемент из указанного множества. Значит, отказ от принципов бивалентности и однозначности предполагает также отказ от классической функции истинности и использование вместо нее какой-либо иной процедуры приписывания высказываниям истинностных значений (а возможно и пересмотр самого понятия истинностного значения). Можно выделить несколько способов построения такой процедуры и конкретного воплощения отмеченной выше основной идеи Американского плана. Соответственно, получаются различные варианты (*версии*) формулировки семантики по Американскому плану. Несмотря на то, что все эти варианты являются формально эквивалентными и взаимопереводимыми, они отличаются друг от друга философскими основаниями, на которые они опираются, а также принимаемыми при этом содержательными предпосылками интуитивного характера.

Версия 1: Функция тематической оценки.

В [Dunn 1966, p. 121-132] вместо классической функции истинности вводится так называемая “тематическая оценка” (aboutness valuation), которая также является функцией, но такой, которая приписывает каждой формуле некоторую пару множеств (X_1, X_2) . Эти множества представляют собой подмножества некоторого более общего множества X , которое Дэнн называет *универсумом дискурса* (universe of discourse). X_1 представляет “темы”

²Нужно отметить, что и до работ Дэнна некоторые (многие?) исследователи высказывали мысль о плодотворности отказа от вышеуказанных классических принципов для решения некоторых важных философских проблем (как правило, для анализа семантических и логических антиномий). В особенности это относится к принципу бивалентности. В этой связи достаточно упомянуть трехзначные логики Лукасевича и Клини. В отличие от принципа бивалентности, принцип однозначности гораздо реже подвергался сомнению, но и здесь имеются прецеденты (хотя и немногочисленные, см. напр., “исчисление антиномий” в [Asenjo 1966]). Однако, во-первых, все эти предложения, как правило, носили “локальный” характер, имея дело всякий раз с каким-нибудь *одним* принципом. Во-вторых, Дэнн (и Белнап) работали независимо от этих традиций (а о некоторых из них они даже не были осведомлены, см., напр., соответствующие разъяснения в [Dunn 1999, Примечание 16]). В-третьих, именно в работах Дэнна была впервые установлена зависимость между вышеупомянутыми принципами и “парадоксами следования”, а также разработан технический аппарат, элиминирующий эти парадоксы. В четвертых, и это самое важное, в семантике Американского плана не просто происходит отказ от некоторых классических принципов, а формулируется новаторская научно-исследовательская программа (*парадигма*) семантического анализа, при этом отказ от классических принципов оказывается, в значительной степени, следствием (а не исходным импульсом) применения данной стратегии.

(topics), о которых то или иное высказывание дает определенную информацию, а X_2 – темы о которых отрицание высказывания дает определенную информацию. Пара (X_1, X_2) называется *суррогатом высказывания* или “высказывательным суррогатом” (proposition surrogate), поскольку эта пара, “будучи приписанной некоторой формуле, дает частичное представление значения этой формулы” ([Dunn 1966, p. 126]). Логические операции вводятся посредством следующих естественных определений:

$$\begin{aligned}\sim(X_1, X_2) &= (X_2, X_1); \\ (X_1, X_2) \vee (Y_1, Y_2) &= (X_1 \cap Y_1, X_2 \cup Y_2); \\ (X_1, X_2) \wedge (Y_1, Y_2) &= (X_1 \cup Y_1, X_2 \cap Y_2).^3\end{aligned}$$

Если универсум дискурса состоит из одной-единственной “темы” x , то функция тематической оценки дает нам следующие четыре возможные приписывания (для каждого высказывания): $(\{x\}, \emptyset)$, $(\emptyset, \{x\})$, $(\{x\}, \{x\})$, $(\emptyset, \emptyset)$. По существу, первые два приписывания соответствуют классическим значениям “ложь” и “истина”, в то время как последние две пары представляют соответственно “пресыщенную” и “не всюду определенную” оценки (ср. [Смирнова 1986, гл. IV]; соответствующие термины из англоязычной литературы – over-determined and under-determined valuations).

Любопытно отметить, что в своей диссертации Данн формулирует семантику без использования терминологии *истинностных* значений, употребляя вместо этого такие эвфемизмы как “темы” (topics), “определенная информация о” (definite information about), “тематическая оценка” (aboutness valuation) и т.п. Причины здесь имеют как философский, так и “социально-психологический” характер. В глазах “логического сообщества” 60-х годов 20-го столетия утверждать, что высказыванию *действительно* могут быть *одновременно* приписаны значения “истина” и “ложь” означало утверждать нечто довольно-таки крамольное. Как пишет Данн в [Dunn 1976, Примечание 10], в диссертации 1966 года ему не хватило “философской выдержки”, чтобы принять в качестве “серьезного словоупотребления” такие обороты, как “предложение является одновременно истинным и ложным” и “предложение не является ни истинным, ни ложным”. Впрочем, отмечает тут же Данн, уже тогда он использовал это словоупотребление во время устных обсуждений.

Версия 2: Оценка как отношение.

Тем не менее, в англоязычной литературе Американский план (не будучи еще так назван) впервые (в развернутом виде) был представлен в статье [Dunn 1976] (эта статья воспроизведена в [Entailment 1992, § 50]). Здесь формулируется “интуитивная семантика” для следования первого порядка с использованием понятия *ситуации* вместо понятия “возможного мира”. Ситуации понимаются тут как некоторые абстрактные состояния нашего знания (эпистемические ситуации), которые могут быть неполными

³Эти определения показывают, что X_1 представляет по сути “область ложности” высказывательного суррогата (X_1, X_2) , в то время как X_2 представляет его “область истинности”. Интерпретируя пару (X_1, X_2) в духе “семантики возможных миров”, имеем: X_1 есть множество “миров”, в которых высказывание является ложным, а X_2 – множество “миров”, в которых оно является истинным (ср. [Смирнова 1986, с. 93]).

и/или противоречивыми. В “ортодоксальных” семантиках возможных миров высказывание (proposition) интерпретируется как функция из множества возможных миров во множество истинностных значений. Фактически, это есть еще одно (онтологизированное) представление классической функции истинности. Данн же предлагает интерпретировать высказывание не как функцию, но просто как некоторое *отношение* между множеством абстрактных ситуаций и множеством $\{T, F\}$ (см. [Dunn 1976, p. 155]). Далее он замечает, что мы можем вообще отвлечься от понятия ситуации и рассмотреть двуместное отношение, которое соотносит множество высказываний со множеством истинностных значений.

Таким образом, основная идея Американского плана может быть воплощена за счет обобщения понятия истинностной оценки и понимания такой оценки как *отношения*, которое *не обязательно является функциональным*. Если мы имеем некоторое предложение, то оценка соотносит с ним либо одно из имеющихся двух истинностных значений (в этом случае она будет вести себя как классическая функция истинности), либо вообще не соотносит с ним никакого значения (не всюду определенная функция), либо ставит ему в соответствие сразу *оба* истинностных значения (нефункциональное отношение). Значения сложных высказываний задаются стандартным образом. При этом важно отметить, что поскольку “ложь” не является теперь простым сокращением для “неистины” и выступает в качестве независимого (самостоятельного) понятия, то условия ложности высказываний должны определяться параллельно с условиями их истинности. Итак, имеем (см. [Dunn 1976, p. 156]):

$$\begin{aligned}\sim A = T &\iff A = F, \\ \sim A = F &\iff A = T; \\ A \wedge B = T &\iff A = T \text{ и } B = T, \\ A \wedge B = F &\iff A = F \text{ или } B = F; \\ A \vee B = T &\iff A = T \text{ или } B = T, \\ A \vee B = F &\iff A = F \text{ и } B = F.\end{aligned}$$

Версия 3: Функция мультиоценки.

В [Dunn 1976] формулируется и другой способ обобщения классической функции истинности, также приводящий к отказу от принципов бивалентности и однозначности. Этот способ состоит в том, что мы продолжаем трактовать истинностную оценку как *функцию*, но в качестве множества значений этой функции выступают теперь не *элементы* множества $\{T, F\}$, а *подмножества* данного множества (включая и пустое множество). Понимаемую таким образом функцию истинности я буду называть *функцией мультиоценки* (или мультиоценочной функцией). В результате применения к какому-нибудь высказыванию мультиоценочной функции получаем следующие четыре возможные приписывания: $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\{\}$. Эти приписывания аналогичны тем, которые мы имеем в результате применения функции тематической оценки (см. выше).

Версия 4: Обобщенные истинностные значения.

По существу, введение функции мультиоценки означает не только интересное обобщение классической функции истинности, но и влечет за собой важное обобщение самого понятия *истинностного значения*. Первым на это обратил внимание Н. Белнап, который в своих статьях [Belnap 1977a,b] предложил рассмотреть “полезную четырехзначную логику”. При этом он исходил из “компьютеризированной” интерпретации тех абстрактных эпистемических ситуаций о которых идет речь в [Dunn 1976]. В самом деле, компьютеру часто приходится иметь дело с *неполной* и/или *противоречивой* информацией. Тем не менее, мы хотим, чтобы компьютер, даже столкнувшись с такого рода базами данных, все же продолжал работать с определенной степенью надежности.

Пусть под истинностным значением некоторого высказывания понимается та информация (о данном высказывании), которая была *сообщена* компьютеру. Тогда, наряду с “нормальными” ситуациям, когда компьютеру сообщается, что высказывание является истинным либо ложным, мы должны принимать во внимание и ситуации (к сожалению, довольно часто встречающиеся в практике) когда компьютеру не было предоставлено никакой определенной информации, либо же была предоставлена (“введена”) противоречивая информация. Последняя ситуация вполне может иметь место, когда компьютер получает данные из различных источников, когда данные вводятся в разное время, или же, когда противоречие содержится в данных лишь *неявным* образом.

Таким образом, мы получаем следующие *четыре* истинностных значения, соответствующих четырем возможным эпистемическим ситуациям. (Заметим, что эти четыре значения в точности совпадают с отмеченными выше возможными приписываниями мультиоценочной функции.)

$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}\}$ – компьютеру была сообщена *только* истина;

$\mathbf{F} = \{\mathbf{F}\}$ – компьютеру была сообщена *только* ложь;

$\mathbf{B} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ – компьютеру были сообщены *одновременно* истина и ложь;

$\mathbf{N} = \{\}$ – компьютеру не были сообщены *ни* истина, *ни* ложь.⁴

Эти новые значения истинности могут быть названы *обобщенными истинностными значениями*. Иными словами, можем утверждать, что применение мультиоценочной функции к некоторому исходному множеству “обычных” истинностных значений дает нам множество обобщенных истинностных значений, каждое из которых представляет собой некоторое подмножество исходного множества (включая, конечно, и пустое множество).

Русская версия Американского плана: обобщенные описания состояний.

История релевантной логики дает несколько ярких примеров время от времени встречающейся ситуации, когда близкие идеи независимо (и иногда практически одновременно) развиваются несколькими исследователями в

⁴Конечно, ссылка на компьютер не является обязательной, она играет здесь определенную *прикладную* роль, от которой, при желании (или необходимости), легко можно абстрагироваться.

различных странах. Начать хотя бы с того, что первая система релевантной логики была сформулирована в знаменитой (в русскоязычной логической литературе) статье [Орлов 1928], ровно за тридцать лет до того, как само это направление было инициировано работами А. Андерсона и Н. Белнапа, которые исходили при этом, главным образом, из статьи [Ackermann 1956] и, естественно, не имели ни малейшего представления о статье И.Е. Орлова. Недавно К. Дожен “переоткрыл” эту статью для зарубежного читателя (см. [Došen 1992]). Нельзя не отметить, что хотя работа Дожена содержит довольно точное и обстоятельное изложение собственно идей Орлова, ее “историческая” часть является весьма и весьма приблизительной и во многом произвольной.

Другой, не менее интересный, случай независимого развития сходных идей произошел в ходе разработки семантической стратегии, представленной Американским планом. Практически одновременно со статьей [Dunn 1976] и независимо от нее, на русском языке в сборнике “Кибернетика и современное научное познание” (Москва: Наука, 1976) вышла статья [Войшвилло 1976], в которой на основе обобщения теории семантической информации Бар-Хиллела и Карнапа строится семантика, которая в дальнейшем получила название “семантика обобщенных описаний состояний”.⁵ Эта семантика была затем подробно развита в работах [Войшвилло 1983], [Войшвилло 1988], [Voishvillo 1996] и некоторых других.

Карнап и Бар-Хиллел трактуют семантическую информацию высказывания как определенный показатель того, насколько принятие данного высказывания ограничивает некоторое исходное множество возможных состояний “мира”. Таким образом, каждому высказыванию приписывается в качестве его “информационного содержания” некоторое множество возможных состояний, в которых оно является истинным, при этом, исходное множество состояний является одним и тем же (общим) для всех высказываний. В качестве такого исходного множества в теории семантической информации принимается множество всех возможных *описаний состояний*. Описание состояния (понятие введено в [Carnap 1947]) есть конъюнкция или множество атомарных высказываний и их отрицаний, такое, что для каждого атомарного высказывания *либо* оно само, *либо* его отрицание (но не оба вместе) принадлежит этому множеству (входит в конъюнкцию).

Понятие обобщенного описания состояния получаем, если откажемся от

⁵Идея формулировки “американской семантики” посредством обобщения теории семантической информации Карнапа и Бар-Хиллела содержится уже в [Dunn 1966]. Напомним, однако, что эта диссертация не была опубликована и, таким образом, идея была недоступна для многих (прежде всего, для советских) исследователей вплоть до выхода статьи [Dunn 1976], где довольно подробно рассматривается возможность построения семантики на основе обобщения теории Карнапа и Бар-Хиллела и карнаповского понятия описания состояния. Отметим, что работы [Dunn 1976] и [Войшвилло 1976] вышли почти одновременно (первая опубликована в первом номере журнала *Philosophical Studies* за 1976 год, получена редакцией 16 января 1975 года; сборник, в котором опубликована вторая, сдан в набор 3 июля 1975 года, подписан к печати 18 мая 1976 года). В свою очередь, теория семантической информации была довольно хорошо известна советским исследователям (см. например, подробное изложение этой теории в статье [Уэлз 1965], на которую имеется ссылка в [Войшвилло 1976]). Любопытно также, что [Dunn 1976] и [Войшвилло 1976] ссылаются на разные работы Бар-Хиллела и Карнапа.

условий, налагаемых на описания состояний (которые соответствуют принципам бивалентности и однозначности). То есть, обобщенное описание состояния есть любое (*произвольное*) множество атомарных высказываний и их отрицаний. Введение же понятия “быть истинным (ложным) в описании состояния”⁶ и определение оценки атомарных высказываний через их *принадлежность* тому или иному описанию состояния, делает очевидной взаимосвязь семантики обобщенных описаний состояний с другими версиями семантики, построенной по Американскому плану.

С философской точки зрения, интерес представляет вопрос о том, как понимать обобщенные описания состояний, для которых не действуют классические принципы. Состояния чего описывают такие множества? Е.К. Войшвилло, по-видимому, склонен здесь к *онтологической* трактовке. Обобщенные описания состояний, так же как и карнаповские описания состояний, представляют собой описания возможных состояний *нашего* мира: “...эти о.с. представляют собой именно миры, к которым могут относиться высказывания” ([Войшвилло 1988, с. 35]). Допущение неполных и противоречивых (“ненормальных”) “миров” не означает однако, по мысли Войшвилло, их *принятия* в качестве реальных возможностей, а имеет “контрфактический характер” ([Войшвилло 1988, с. 36]). Выражаясь философским языком, мы не “отрицаем” принципы бивалентности и однозначности, а “отвлекаемся” (“абстрагируемся”) от них (см. [Войшвилло 1988, с. 33]).

В этом заключается принципиальное философское отличие “русской версии” Американского плана от его “ортодоксально-американского” варианта, в рамках которого принимается *эпистемологическая* интерпретация. К примеру, Данн вообще отказывается трактовать неполные и противоречивые описания как “описания состояний” (поскольку таких состояний мира *не существует*) и вводит вместо этого ([Dunn 1976, p. 163]) понятие “описание ситуации” (*situation description*), понимая под последними, опять же, абстрактные эпистемические ситуации.

Таковы, вкратце, некоторые способы построения семантики в соответствии с Американской стратегией элиминации парадоксов логического следования, о которых шла речь в начале статьи. Неискушенный в релевантной логике читатель может, однако, заметить, что связь между принципами бивалентности и однозначности и этими парадоксами осталась пока непроясненной. Каким образом отказ от данных принципов приводит к элиминации парадоксальных свойств классического отношения следования? Суть дела заключается в том, что определение отношения следования остается неизменным как в классической семантике, так и в семантиках Американского плана: из высказывания *A* следует высказывание *B* если и только если всегда, когда истинно *A*, истинно также и *B*.⁷ Так как при отказе

⁶ Вообще говоря, по Карнапу, описания состояний представляют собой *синтаксические* конструкции. Поэтому говорить об истинности высказываний в том или ином описании состояния *формально* не совсем правильно. Более корректно утверждать, что высказывания являются истинными (ложными) в мире, “детерминируемом” (или характеризуемом) тем или иным описанием состояния.

⁷ Для четырехзначной логики Белнапа: “всегда, когда обобщенное истинностное значение высказывания *A* включает “Т”, так же ведет себя и обобщенное истинностное

(“абстрагировании”) от принципов бивалентности и однозначности становятся возможными такие положения дел, когда закон логики не является истинным, а противоречивое утверждение является таковым, то теперь закон логики не следует из тех высказываний, которые при этом являются истинными, а из противоречивого утверждения не следуют те высказывания, которые при этом истинными не являются. Парадоксальные принципы “закон логики следует из чего угодно” и “из противоречия следует все, что угодно” больше не являются общезначимыми. Логическое следование становится *релевантным*.

Остановимся на одном интересном и важном свойстве отношения логического следования. Из определения этого отношения явствует, что оно обладает свойством *передачи истинности*. Значение “истина” *передается* от некоторого высказывания тому высказыванию, которое из него следует (от посылок – заключению). Для классического отношения следования очевидно, что оно также обладает свойством передавать не-ложность. Если из A следует B , то всегда, когда A является не-ложным, B также является не-ложным. Равносильным образом это свойство может быть интерпретировано как свойство *обратной передачи ложности* (т.е. передачи ложности в обратном направлении): всегда, когда B ложно, A также является ложным. Данное свойство, не будучи явно сформулированным в определении следования, выполняется просто в силу того, что классическая истинность эквивалентна классической не-ложности (благодаря принципам бивалентности и однозначности).

Поскольку при переходе к отношению релевантного логического следования происходит отказ от этих принципов, значения “истина” и “ложь” становятся независимыми и превращаются в автономные понятия. Можно было бы ожидать, что свойство передачи не-ложности не должно теперь автоматически выполняться, т.е. что оно не будет теперь вытекать из свойства передачи истинности. Это ожидание, однако, не оправдывается! Данный факт может показаться удивительным, но даже в отсутствии принципов бивалентности и однозначности свойство следования передавать истинность *влечет* за собой свойство передавать не-ложность *и наоборот*. В общем виде доказательство этого факта впервые было осуществлено Данном в [Dunn 1976] (см. также [Dunn 2000, § 2]). Для семантики обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло (семантическая) эквивалентность этих свойств доказана в [Шрамко 1994]. Свойство передачи не-ложности необходимо для обоснования *контрапозитивности* отношения следования. Поэтому, если бы оно не следовало из свойства сохранения истинности, нам бы пришлось дополнительно его постулировать. В силу указанной эквивалентности, в этом, однако, нет никакой необходимости.

Подводя предварительный итог осуществленного в данном параграфе обзора некоторых ключевых моментов Американского плана, можно сделать вывод, что он представляет собой семантическую стратегию преодоления парадоксальности *классического* отношения логического следования.

значение высказывания B ”. Для семантики обобщенных описаний состояний: “во всяком обобщенном описании состояния, в котором истинно A , истинно также и B ”.

Упомянутые выше формулы A и B являются формулами *языка классической логики*, “истина” и “ложь”, о которых шла речь, являются *классическими истинностными значениями*, а получаемое непарадоксальное отношение следования есть, по существу, отношение релевантного логического следования между *классическими* высказываниями.

Между тем, хорошо известно, что существует много других логических систем, отношение следования в которых парадоксально точно в том же отношении, в каком парадоксально отношение следования классической логики. Одной из таких логик является *интуиционистская логика*. В самом деле, для любого закона интуиционистской логики A и для любого высказывания языка интуиционистской логики B , из B следует A , а из $\sim A$ следует B . Таким образом, возникает задача формулировки непарадоксального (релевантного) отношения логического следования для интуиционистских высказываний.

В принципиальном плане мы исходим из выдвинутого в работах Войшвилло понимания релевантной логики как особого “этапа” в развитии современной логики. Согласно этому пониманию, релевантная логика представляет универсальный аппарат анализа отношения следования различных частных систем, в которых это отношение является парадоксальным. Иными словами, упомянутая выше задача “устранения парадоксальности” отношения логического следования той или иной логики (в частности, интуиционистской) эксплицируется теперь как задача “релевантизации” этого отношения, а значит, и релевантизации этой логики в целом.

Итак, в настоящей статье будет рассмотрена возможность распространения основных принципов Американского плана на анализ отношения логического следования интуиционистской логики. На основе логико-философского анализа понятий интуиционистской истины и интуиционистской лжи будет осуществлено обобщение семантики Крипке для интуиционистской логики, что и позволит *релевантизировать* интуиционистское отношение следования. В отличие от работ [Шрамко 1989], [Шрамко 1997], [Shramko 1999a], [Shramko 1999b], [Shramko 2000], в которых семантика строилась в терминологии *интуиционистских описаний состояний*, анализ настоящей статьи будет максимально абстрактным, без привязки к какому-либо конкретному определению истинностной оценки пропозициональных переменных.

2. Истина и ложь в интуиционистской логике

Понятие истины в интуиционистской логике существенным образом отличается от классического понятия истины. Интуиционизм, также как и другие конструктивные концепции, принимает то, что может быть названо *конструктивной концепцией истины*. Согласно этой концепции, высказывание считается истинным тогда и только тогда, когда оно является *конструктивно доказанным*, т.е. когда имеется эффективная процедура, позволяющая построить (получить) доказательство данного высказывания. Во избежание круга, само понятие конструктивного доказательства вво-

дится посредством стандартного индуктивного определения, фиксируя сначала, что представляет собой конструктивное доказательство атомарных высказываний, а затем распространяя это понятие на высказывания, содержащие логические константы.

Важным свойством конструктивной истины является *свойство сохранности* (иногда называемое также свойством монотонности): высказывание, будучи однажды доказанным, остается таким и в дальнейшем.⁸ Конструктивно истинное высказывание никогда не перестает быть таковым – множество доказанных утверждений может только расширяться. Данное свойство представляет собой, конечно, довольно сильную идеализацию. Но именно эта идеализация выражает суть конструктивной концепции истины в ее отличии от классической (корреспондентской) концепции. Для установления конструктивной истинности того или иного высказывания первостепенное значение имеет построение идеальной (теоретической) конструкции, доказывающей это высказывание, а не эмпирическая проверка (соотнесение высказывания с действительностью). Что касается действительности, то конструктивный подход возможен лишь по отношению к действительности особого рода, например, “действительности” абстрактных математических объектов. С точки зрения интуиционизма, действительность остается неизменной, изменяются лишь наши знания, причем только аккумулятивным образом.

Примечательная особенность интуиционистской концепции состоит в том, что здесь понятие ложности не является *непосредственным* представителем объектной связки отрицания (или, наоборот, интуиционистское отрицание не является непосредственным представителем интуиционистской ложности). Интуиционистской “лжи” скорее соответствует то, что А. Гейтинг называл “фактическим отрицанием” (см. [Heyting 1956, p. 19]), которое представляет собой связку метаязыка и, по существу, имеет классический характер. Утверждение “высказывание A является ложным” означает в интуиционизме, как и в классике, “высказывание A не является истинным”. То есть, интуиционистская ложь есть не что иное, как интуиционистская “не-истинность”, а значит, истинностные значения в интуиционизме, также как и классические истинностные значения, подчиняются принципам бивалентности и однозначности. С учетом же конструктивной концепции истинности, интуиционистская ложность высказывания A интерпретируется как “высказывание A не является конструктивно доказанным”. Таким образом, интуиционистская ложь, в отличие от интуиционистской истины,

⁸Ср. [Драгалин 1979, с. 18]: “Мы принимаем *принцип сохранности*, состоящий в том, что если истинность некоторого суждения обнаружена, то оно остается истинным и в будущем”. В англоязычной литературе этот принцип часто называют “условием наследственности” – *hereditary condition*. Может показаться, что это свойство совпадает с отмеченным выше свойством отношения следования передавать истинность (по наследству?). Тем не менее, несмотря на то, что, как мы увидим ниже, эти свойства действительно тесно взаимосвязаны, они, все же, представляют собой *существенно различные* свойства. Свойство сохранности есть свойство *самого понятия истинности*; в соответствии с ним, сохраняется истинность *одного и того же* высказывания. Свойство передачи является свойством *отношения следования* – в рамках этого отношения истинность передается *от одного высказывания к другому*.

не является конструктивным понятием. В самом деле, в данный момент мы можем не располагать доказательством того или иного высказывания, это, однако, вовсе не исключает возможности того, что доказательство будет найдено позже. То есть, интуиционистски ложное высказывание вполне может перестать быть таковым, а значит, интуиционистская ложность (в отличие от интуиционистской истинности) *не* подчиняется принципу сохранности. Зато она обладает свойством *обратной сохранности*: если высказывание является ложным сейчас, это означает, что оно было таковым всегда (в прошлом). Иными словами, в то время как множество истинных высказываний может с течением времени только расти, множество ложных высказываний может только сокращаться.

Следует заметить, что интуиционистские истинностные значения, в гораздо большей степени чем классические, являются *относительными* понятиями. Собственно говоря, и в классике истинность (и ложность) представляет собой не свойство высказываний, а, скорее, некоторое отношение между высказыванием и миром. Многие исследователи, однако, отмечают, что классическая логика может быть истолкована как логика только нашего (т.е. одного) мира. Таким образом, при фиксации этого мира, ссылка на него может быть просто опущена. Если же речь идет о доказательствах (как в конструктивной концепции истинности), то особое значение приобретает вопрос, *в рамках какой теории* (теоретической конструкции) произведено то или иное доказательство (или на какой стадии развития теории доказательство было получено). Вообще, говорить, что высказывание является доказанным или не доказанным, и при этом не уточнять, в какой теории это имеет место, просто-напросто беспредметно. Поэтому, утверждение “высказывание A является интуиционистски истинным” следует каждый раз понимать как “высказывание A является доказанным в рамках (определенной) теоретической конструкции a ”. Значит, интуиционистская функция истинности не просто отображает высказывания во множество истинностных значений, она должна учитывать в качестве особого *параметра* некоторую возможную теоретическую конструкцию, относительно которой осуществляются доказательства высказываний. Пусть $\mathcal{L}$ есть множество высказываний, а $\mathcal{U}$ представляет собой множество теоретических конструкций (или множество состояний теории). Тогда интуиционистская функция истинности представляет собой функцию из множества $\mathcal{L} \times \mathcal{U}$ во множество интуиционистских истинностных значений — $\{T, f\}$. Мы используем для обозначения интуиционистской истины и интуиционистской лжи разного рода буквы (заглавную для истины и строчную для лжи), чтобы подчеркнуть отмеченную выше *асимметричность* интуиционистских истинностных значений с точки зрения конструктивности.

3. Семантика Крипке для интуиционистской логики. Отношение вынуждения

В [Kripke 1965] была сформулирована семантика возможных миров для интуиционистской логики с использованием двуместного отношения достижимости между мирами. *Интуиционистской моделью* назовем структуру

$\langle \mathcal{U}, \leq, \nu \rangle$, где $\mathcal{U}$ есть непустое множество, $\leq$ – рефлексивное и транзитивное отношение на $\mathcal{U}$ (отношение частичного порядка), а ν – всюду определенная двуместная функция оценки, такая что для каждого атомарного высказывания p и для каждого $a \in \mathcal{U}$, $\nu(p, a)$ принимает значение из множества $\{T, f\}$, и при этом выполняется следующее условие:

$$(\text{HC}_T^\nu) \nu(p, a) = T \text{ и } a \leq b \implies \nu(p, b) = T.$$

Функция оценки легко распространяется на множество всех высказываний языка посредством следующих определений:

$$\begin{aligned} (\&_T^\nu) \nu(A \& B, a) = T &\iff \nu(A, a) = T \text{ и } \nu(B, a) = T, \\ (\&_f^\nu) \nu(A \& B, a) = f &\iff \nu(A, a) = f \text{ или } \nu(B, a) = f; \\ (\vee_T^\nu) \nu(A \vee B, a) = T &\iff \nu(A, a) = T \text{ или } \nu(B, a) = T, \\ (\vee_f^\nu) \nu(A \vee B, a) = f &\iff \nu(A, a) = f \text{ и } \nu(B, a) = f; \\ (\sim_T^\nu) \nu(\sim A, a) = T &\iff \forall b (a \leq b \implies \nu(A, b) = f), \\ (\sim_f^\nu) \nu(\sim A, a) = f &\iff \exists b (a \leq b \text{ и } \nu(A, b) = T); \\ (\supset_T^\nu) \nu(A \supset B, a) = T &\iff \forall b (a \leq b \implies (\nu(A, b) = f \text{ или } \nu(B, b) = T)), \\ (\supset_f^\nu) \nu(A \supset B, a) = f &\iff \exists b (a \leq b \text{ и } \nu(A, b) = T \text{ и } \nu(B, b) = f). \end{aligned}$$

Определения значимости в модели и общезначимости – стандартные.

Заметим, что поскольку для любой формулы A имеет место $\nu(A, a) = f \iff \nu(A, a) \neq T$, условия ложности формул можно было бы опустить, что обычно и делается. Мы сформулировали эти условия в явном виде, поскольку они будут играть существенную роль при переходе к понятию релевантного интуиционистского следования.

Индукцией по построению условие сохранности интуиционистской истины (HC_T^ν) легко доказывается для любой формулы A . Что касается интуиционистской лжи, то, в полном соответствии с содержательным рассмотрением предыдущего параграфа, она обладает свойством обратной сохранности. Это устанавливается посредством следующей элементарной леммы:

Лемма 1.

Для любой интуиционистской модели, и для любого атомарного высказывания p , выполняется следующее условие:

$$(\text{HC}_f^\nu) \nu(p, b) = f \text{ и } a \leq b \implies \nu(p, a) = f.$$

Опять же, стандартное индуктивное доказательство распространяет это условие на произвольную формулу A .

Содержательно $\mathcal{U}$, как и в конце предыдущего параграфа, представляет множество теоретических конструкций, а $\leq$ – некоторое отношение между конструкциями, определяющее возможность (и пути) перехода от одних конструкций к другим.

Обратимся теперь к отношению следования в интуиционистской логике. По не вполне понятным причинам, относительно этого отношения в литературе сложилась своеобразная “традиция умолчания”. То есть, при построении семантики, как правило, это отношение вообще специально не

рассматривается и не определяется. Это, однако, несложно сделать аналогично тому, как это делается в классической логике, учитывая при этом возможность наличия различных моделей.

Определение 1.

$$A \models B \iff \forall \mathcal{U} \forall a \in \mathcal{U} \forall \nu (\nu(A, a) = T \implies \nu(B, a) = T).$$

Легко может быть доказана следующая теорема, устанавливающая адекватность данного определения (т.е. тот факт, что посредством него действительно определяется интуиционистское отношение следования):

Теорема 1.

$$A \models B \iff \vdash A \supset B.$$

Теперь нетрудно убедиться, что для отношения интуиционистского следования действительно выполняются парадоксальные принципы, о которых шла речь выше, а значит, это отношение нерелевантно.

Семантику интуиционистской логики часто формулируют с использованием отношения вынуждения. Так поступает, например, Гжегорчик в [Grzegorzczuk 1964] и М. Фиттинг в [Fitting 1969]. С. Крипке также отмечает возможность такой интерпретации (см. [Kripke 1965, p. 118-120]). Отношение вынуждения представляет собой отношение между “мирами” и высказываниями, такое что для каждого мира и для каждого высказывания всегда определено (при данной оценке атомарных высказываний), вынуждает ли данный мир это высказывание, или нет. Если отношение вынуждения обозначить посредством символа “ $\Vdash$ ”, то формально тот факт, что мир a вынуждает высказывание A (при оценке ν) можно записать как $a \Vdash^\nu A$. Неформально выражение “ $a \Vdash^\nu A$ ” можно трактовать как утверждение, что высказывание A является доказанным в рамках теоретической конструкции a . По существу, “ $a \Vdash^\nu A$ ” есть просто другая форма записи для “ $\nu(A, a) = T$ ”. С учетом отмеченного выше взаимоотношения между интуиционистской истиной и интуиционистской ложью, “ $\nu(A, a) = f$ ” может быть записано просто как “не ($a \Vdash^\nu A$)”.

4. Обобщение семантики Крипке. Отношение отвержения

Рассмотрим теперь возможность перестройки семантики Крипке для интуиционистской логики в соответствии с Американским планом. Мы осуществим такую перестройку посредством обобщения интуиционистской функции истинностной оценки и введения вместо нее интуиционистской функции мультиоценки.

Обобщенной интуиционистской моделью назовем тройку $\langle \mathcal{U}, \leq, m \rangle$, где $\mathcal{U}$ и $\leq$ те же, что и в интуиционистских моделях, а m – функция мультиоценки, отображающая множество $\mathcal{P} \times \mathcal{U}$ во множество всех подмножеств множества $\{T, f\}$ ($\mathcal{P}$ есть множество всех атомарных высказываний интуиционистского языка). Таким образом, для любого атомарного высказывания

p и для любого $a \in \mathcal{U}$, $m(p, a)$ принимает одно из следующих четырех значений: $\{T\}$, $\{f\}$, $\{T, f\}$, $\{\}$. Это есть обобщенные истинностные значения интуиционистской логики.

Интересно, что введение обобщенных истинностных значений вовсе не делает семантику более громоздкой. При помощи несложной технической модификации вполне можно обойтись без того, чтобы всякий раз (например, при распространении мультиоценочной функции на сложные высказывания) явным образом перечислять все четыре обобщенные истинностные значения, а ограничиться упоминанием лишь обычных значений истинности интуиционистской логики. А именно, выделим явно случаи, когда $T \in m(A, a)$ и $f \in m(A, a)$. Следуя Белнапу, будем говорить, что в первом случае высказывание A является *по крайней мере* истинным, а во втором случае – *по крайней мере* ложным. Теперь достаточно просто переписать все семантические условия и определения с заменой везде $\nu(A, a) = T$ на $T \in m(A, a)$, а $\nu(A, a) = f$ на $f \in m(A, a)$. Например, условие сохранности интуиционистской истины принимает следующий вид:

$$(HC_T^m) T \in m(p, a) \text{ и } a \leq b \implies T \in m(p, b).$$

Что касается условия обратной сохранности интуиционистской лжи, то оно теперь не является элементарным следствием (и вообще не является следствием) (HC_T^m) . Таким образом, это условие приходится теперь дополнительно *постулировать*. То есть, имеем:

$$(HC_f^m) f \in m(p, b) \text{ и } a \leq b \implies f \in m(p, a).$$

В целом, условия ложности нельзя теперь получить из условий истинности, в обобщенных интуиционистских моделях они не являются избыточными и должны определяться независимым образом (как это и положено в соответствии с Американским планом, где истинность и ложность никак не взаимосвязаны, а представляют собой равноправные – исходные – семантические сущности). Итак, имеем следующие условия истинности и ложности для сложных высказываний:

$$\begin{aligned} (&\&_T^m) T \in m(A \& B, a) \iff T \in m(A, a) \text{ и } T \in m(B, a), \\ (&\&_f^m) f \in m(A \& B, a) \iff f \in m(A, a) \text{ или } f \in m(B, a); \\ (\vee_T^m) T \in m(A \vee B, a) &\iff T \in m(A, a) \text{ или } T \in m(B, a), \\ (\vee_f^m) f \in m(A \vee B, a) &\iff f \in m(A, a) \text{ и } f \in m(B, a); \\ (\sim_T^m) T \in m(\sim A, a) &\iff \forall b (a \leq b \implies f \in m(A, b)), \\ (\sim_f^m) f \in m(\sim A, a) &\iff \exists b (a \leq b \text{ и } T \in m(A, b)); \\ (\supset_T^m) T \in m(A \supset B, a) &\iff \forall b (a \leq b \implies (f \in m(A, b) \text{ или } T \in m(B, b))), \\ (\supset_f^m) f \in m(A \supset B, a) &\iff \exists b (a \leq b \text{ и } T \in m(A, b) \text{ и } f \in m(B, b)). \end{aligned}$$

Изложение семантики можно еще больше приблизить к традиционному за счет определенной переинтерпретации отношения вынуждения, а также введения дополнительного отношения (между мирами и высказываниями), которое может быть названо “отношением отвержения”.

В качестве первого шага, вместо старого отношения вынуждения ($\Vdash$) рассмотрим новое отношение $\Vdash_T$. Выражение “ $a \Vdash_T^m A$ ” означает “мир a *вынуждает истинность* высказывания A (при мультиоценке m)”, или же, как и в стандартной интуиционистской модели – “высказывание A является доказанным в рамках теоретической конструкции a ”. В отличие от стандартных интуиционистских моделей, выражение “ $a \Vdash_T^m A$ ” интерпретируется теперь как “ $T \in m(A, a)$ ”, а не как “ $\nu(A, a) = T$ ”.

Аналогичным образом вводим другое исходное семантическое отношение $\Vdash_f$. Выражение “ $a \Vdash_f^m A$ ” можно понимать как “мир a *вынуждает ложность* высказывания A (при мультиоценке m)”. Это означает, что мы (возможно временно) считаем, что высказывание A *может быть отвергнуто* в рамках теоретической конструкции a , хотя и не исключена возможность того, что в ходе дальнейшего развития наших знаний высказывание A будет принято. Выражение “ $a \Vdash_f^m A$ ” есть по существу иная форма записи выражения “ $f \in m(A, a)$ ”.

Очевидно, что для одного и того же высказывания A , в рамках одной и той же теоретической конструкции a , при одной и той же мультиоценке m , вполне может одновременно иметь место $a \Vdash_T^m A$ и $a \Vdash_f^m A$, а также не иметь места ни то, и ни другое. В обобщенных интуиционистских моделях отношения вынуждения и отвержения не обязательно подчиняются принципам бивалентности и однозначности.

Переформулируем семантические условия обобщенной интуиционистской модели в терминах вынуждения и отвержения:

$$\begin{aligned}
& (\text{НС } \Vdash_T^m) \ a \Vdash_T^m p \text{ и } a \leq b \implies b \Vdash_T^m p, \\
& (\text{НС } \Vdash_f^m) \ b \Vdash_f^m p \text{ и } a \leq b \implies a \Vdash_f^m p; \\
& (\& \Vdash_T^m) \ a \Vdash_T^m A \& B \iff a \Vdash_T^m A \text{ и } a \Vdash_T^m B, \\
& (\& \Vdash_f^m) \ a \Vdash_f^m A \& B \iff a \Vdash_f^m A \text{ или } a \Vdash_f^m B; \\
& (\vee \Vdash_T^m) \ a \Vdash_T^m A \vee B \iff a \Vdash_T^m A \text{ или } a \Vdash_T^m B, \\
& (\vee \Vdash_f^m) \ a \Vdash_f^m A \vee B \iff a \Vdash_f^m A \text{ и } a \Vdash_f^m B; \\
& (\sim \Vdash_T^m) \ a \Vdash_T^m \sim A \iff \forall b (a \leq b \implies b \Vdash_f^m A), \\
& (\sim \Vdash_f^m) \ a \Vdash_f^m \sim A \iff \exists b (a \leq b \text{ и } b \Vdash_T^m A); \\
& (\supset \Vdash_T^m) \ a \Vdash_T^m A \supset B \iff \forall b (a \leq b \implies b \Vdash_f^m A \text{ или } b \Vdash_T^m B), \\
& (\supset \Vdash_f^m) \ a \Vdash_f^m A \supset B \iff \exists b (a \leq b \text{ и } b \Vdash_T^m A \text{ и } b \Vdash_f^m B).
\end{aligned}$$

Ясно, что оба способа записи дают возможность адекватно выразить все четыре обобщенных интуиционистских истинностных значения:

$$\begin{aligned}
\{T\}: \quad & T \in m(A, a) \text{ и } f \notin m(A, a), \\
& a \Vdash_T^m A \text{ и не}(a \Vdash_f^m A); \\
\{f\}: \quad & T \notin m(A, a) \text{ и } f \in m(A, a), \\
& \text{не}(a \Vdash_T^m A) \text{ и } a \Vdash_f^m A; \\
\{T, f\}: \quad & T \in m(A, a) \text{ и } f \in m(A, a), \\
& a \Vdash_T^m A \text{ и } a \Vdash_f^m A;
\end{aligned}$$

$$\{ \}: \quad T \notin m(A, a) \text{ и } f \notin m(A, a), \\ \text{не}(a \Vdash_T^m A) \text{ и } \text{не}(a \Vdash_f^m A).$$

Итак, во всякой обобщенной интуиционистской модели при всякой мультиоценке m должны выполняться условия (НС_T^m) и (НС_f^m) , а также $(\&_T^m) - (\supset_f^m)$, или же – в альтернативной записи – $(\text{НС} \Vdash_T^m)$, $(\text{НС} \Vdash_f^m)$ и $(\& \Vdash_T^m) - (\supset \Vdash_f^m)$.

5. Релевантное следование для формул интуиционистской логики

В рамках обобщенных интуиционистских моделей может быть определено *релевантное* (непарадоксальное) следование для высказываний интуиционистского языка. Определение остается формально таким же, как и в стандартных интуиционистских моделях, но с заменой везде функции оценки на функцию мультиоценки. Определение может быть сформулировано как в терминах “принадлежности”, так и с использованием отношения вынуждения. Суть дела заключается в том, что из интуиционистского высказывания A релевантно следует интуиционистское высказывание B , если и только если *всегда* (т.е. в любой обобщенной интуиционистской модели) когда A является *по крайней мере* истинным, B также *по крайней мере* истинно.

Определение 2.

$$A \Vdash_{\text{rel}} B \iff \forall \mathcal{U} \forall a \in \mathcal{U} \forall m (T \in m(A, a) \implies T \in m(B, a)).$$

Для определенного таким образом отношения, парадоксы следования не имеют места.

Прежде чем перейти к свойству передачи следованием не-ложности, совершим небольшой экскурс в “историю”. В терминах интуиционистских описаний состояний данная семантика была впервые опубликована мною в [Шрамко 1989] (собственно формулировка семантики относится к 1986-87 годам).⁹ Однако там, также как и в [Шрамко 1997], опущено условие обратной сохранности для интуиционистской ложности (НС_f^m) . Это условие вводится только в [Shramko 1999a] (см. определение 2.4.1 на с. 49-50). Дело в том, что на ранних стадиях разработки семантики я полагал, что свойство передачи следованием не-ложности может быть обосновано даже без дополнительного постулирования для интуиционистской лжи свойства обратной сохранности. Это предположение оказалось ошибочным. Соответственно, ошибку содержит доказательство леммы 1 в [Шрамко 1989] и леммы 2.5.8

⁹В [Fitting 1988] содержится набросок схожего обобщения семантики Крипке для интуиционистской логики посредством введения “слабых” моделей Крипке. Фиттинг использует при этом технику “означенных формул”. Для любой формулы A , TA и FA являются означенными формулами. Используя эту технику, мы могли бы записать “ $a \Vdash_T^m TA$ ” и “ $a \Vdash_f^m FA$ ” вместо “ $a \Vdash_T^m A$ ” и “ $a \Vdash_f^m A$ ” соответственно. Заметим, что Фиттинг не формулирует в своей семантике понятия следования и вообще не рассматривает проблематику парадоксов следования, работая вне “релевантно-логической” традиции.

в [Шрамко 1997]. В [Shramko 1999a, с. 55-57] это доказательство модифицировано и исправлено с учетом обратной сохранности интуиционистской лжи.

Как уже отмечалось выше, несмотря на то, что в семантиках по Американскому плану истина и ложь полностью независимы друг от друга, и что, поэтому, почти все условия и определения, трактующие ложность (“вытекающие” в обычных семантиках из условий и определений, трактующих истину), должны теперь формулироваться дополнительно, удивительный факт состоит в том, что это *не* относится к свойству релевантного следования передавать не-ложность. Именно в рамках отношения следования истинность и ложность продолжают оставаться взаимосвязанными понятиями, и достаточно постулировать для релевантного следования свойство передавать (от посылок к заключению) истинность, как это *тут же* влечет за собой свойство передавать не-ложность (и наоборот). Этот факт еще предстоит философски осмыслить. Сейчас докажем, что данное свойство выполняется и для сформулированного выше релевантного логического следования интуиционистской логики.

Лемма 2.

Пусть дана обобщенная интуиционистская модель $\langle \mathcal{U}, \leq, m \rangle$. Определим новую функцию m^* (двойственную по отношению к m), такую что для любой формулы A

$$\begin{aligned} T \in m^*(A, a) &\iff f \notin m(A, a); \\ f \in m^*(A, a) &\iff T \notin m(A, a).^{10} \end{aligned}$$

Тогда $\langle \mathcal{U}, \leq, m^* \rangle$ есть обобщенная интуиционистская модель с функцией мультиоценки m^* .

Доказательство.

Нужно показать, что для $\langle \mathcal{U}, \leq, m \rangle$ выполняются условия $(\text{НС}_T^{m^*})$ и $(\text{НС}_f^{m^*})$, а также $(\&_T^{m^*}) - (\supset_f^{m^*})$.

$(\text{НС}_T^{m^*})$: Допустим, $T \in m^*(p, a)$ и $a \leq b$. По определению m^* , $f \notin m(p, a)$. По (НС_f^m) имеем $f \notin m(p, b)$. По определению m^* , получаем $T \in m^*(p, b)$.

$(\text{НС}_f^{m^*})$: Допустим, $f \in m^*(p, b)$ и $a \leq b$. По определению m^* , $T \notin m(p, b)$. По (НС_T^m) имеем $T \notin m(p, a)$, и по определению m^* , получаем $f \in m^*(p, a)$.

$(\&_T^{m^*})$: $T \in m^*(A \& B, a) \iff f \notin m(A \& B, a)$ (определение m^*) $\iff f \notin m(A, a)$ и $f \notin m(B, a)$ $(\&_f^m) \iff T \in m^*(A, a)$ и $T \in m^*(B, a)$ (определение m^*).

$(\&_f^{m^*})$: $f \in m^*(A \& B, a) \iff T \notin m(A \& B, a)$ (определение m^*) $\iff T \notin m(A, a)$ или $T \notin m(B, a)$ $(\&_T^m) \iff f \in m^*(A, a)$ или $f \in m^*(B, a)$ (определение m^*).

¹⁰Согласно этому определению, функция $*$ обращает пресыщенную оценку формулы A в неопределенную и наоборот, оставляя “нормальную” оценку без изменения. По существу, данная функция является аналогом операции “звездочка” в “австралийской семантике” Рутли и Мейера.

$$\begin{aligned}
(\vee_T^{m^*}): T \in m^*(A \vee B, a) &\iff f \notin m(A \vee B, a) \text{ (определение } m^*) \iff f \notin \\
&m(A, a) \text{ или } f \notin m(B, a) \quad (\vee_f^m) \iff T \in m^*(A, a) \text{ или } T \in m^*(B, a) \\
&\text{(определение } m^*). \\
(\vee_f^{m^*}): f \in m^*(A \vee B, a) &\iff T \notin m(A \vee B, a) \text{ (определение } m^*) \iff T \notin \\
&m(A, a) \text{ и } T \notin m(B, a) \quad (\vee_T^m) \iff f \in m^*(A, a) \text{ и } f \in m^*(B, a) \text{ (опре-} \\
&\text{деление } m^*). \\
(\sim_T^{m^*}): T \in m^*(\sim A, a) &\iff f \notin m(\sim A, a) \text{ (определение } m^*) \iff \forall b (a \leq b \Rightarrow \\
&T \notin m(A, b)) \quad (\sim_f^m) \iff \forall b (a \leq b \Rightarrow f \in m^*(A, b)) \text{ (определение } m^*). \\
(\sim_f^{m^*}): f \in m^*(\sim A, a) &\iff T \notin m(\sim A, a) \text{ (определение } m^*) \iff \exists b (a \leq \\
&b \text{ и } f \notin m(A, b)) \quad (\sim_T^m) \iff \exists b (a \leq b \text{ и } T \in m^*(A, b)) \text{ (определение} \\
&m^*). \\
(\supset_T^{m^*}): T \in m^*(A \supset B, a) &\iff f \notin m(A \supset B, a) \text{ (определение } m^*) \iff \\
&\forall b (a \leq b \Rightarrow (T \notin m(A, b) \text{ или } f \notin m(B, b))) \quad (\supset_f^m) \iff \forall b (a \leq b \Rightarrow \\
&(f \in m^*(A, b) \text{ или } T \in m^*(B, b))) \text{ (определение } m^*). \\
(\supset_f^{m^*}): f \in m^*(A \supset B, a) &\iff T \notin m(A \supset B, a) \text{ (определение } m^*) \iff \\
&\exists b (a \leq b \text{ и } f \notin m(A, b) \text{ и } T \notin m(B, b)) \quad (\supset_T^m) \iff \exists b (a \leq b \text{ и } T \in \\
&m^*(A, b) \text{ и } f \in m^*(B, b)) \text{ (определение } m^*).
\end{aligned}$$

Теорема 2.

$$\forall \mathcal{U} \forall a \in \mathcal{U} \forall m (T \in m(A, a) \Rightarrow T \in m(B, a)) \iff \forall \mathcal{U} \forall a \in \mathcal{U} \forall m (f \notin m(A, a) \Rightarrow f \notin m(B, a)).$$

Доказательство.

$\implies$: Пусть $\forall \mathcal{U} \forall a \in \mathcal{U} \forall m (T \in m(A, a) \Rightarrow T \in m(B, a))$. Предположим, $\exists \mathcal{U} \exists a \in \mathcal{U} \exists m (f \notin m(A, a) \text{ и } f \in m(B, a))$. Рассмотрим эти $\mathcal{U}$, a и m . Определим функцию m^* так же, как и в лемме 2. По этой лемме, $\langle \mathcal{U}, \leq, m^* \rangle$ есть обобщенная интуиционистская модель. Имеем $T \in m^*(A, a)$ и $T \notin m^*(B, a)$. Противоречие.

$\impliedby$: Доказательство аналогично.

6. К проблеме аксиоматизации

Хорошо известно, что релевантное логическое следование для формул классической логики, которое получаем при выполнении Американского плана, аксиоматизируется посредством системы “тавтологических следований” первого порядка из [Entailment 1975, §15.2]. Система носит название $\mathbf{E}_{\text{fde}}$ и представляет собой “первопорядковый” фрагмент системы релевантной логики $\mathbf{E}$ (также как и $\mathbf{R}$, поэтому в [Dunn 1986] используется название $\mathbf{R}_{\text{fde}}$). Все теоремы $\mathbf{E}_{\text{fde}}$ являются формулами вида $A \rightarrow B$, где как A , так и B не содержат “связки следования” $\rightarrow$, т.е. являются формулами языка классической логики. $\mathbf{E}_{\text{fde}}$ имеет следующие схемы аксиом и правила вывода:

- a1. $A \& B \rightarrow A$,
- a2. $A \& B \rightarrow B$,
- a3. $A \rightarrow A \vee B$,

- a4. $B \rightarrow A \vee B$,
- a5. $A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$,
- a6. $A \rightarrow \sim \sim A$,
- a7. $\sim \sim A \rightarrow A$;
- r1. $A \rightarrow B, B \rightarrow C / A \rightarrow C$,
- r2. $A \rightarrow B, A \rightarrow C / A \rightarrow B \& C$,
- r3. $A \rightarrow C, B \rightarrow C / A \vee B \rightarrow C$,
- r4. $A \rightarrow B / \sim B \rightarrow \sim A$.

Возникает аналогичная задача формулировки системы, аксиоматизирующей отношение релевантного логического следования для формул интуиционистской логики (введенного посредством Определения 2). В [Шрамко 1989], [Шрамко 1997], [Shramko 1999a] предлагается система $\mathbf{IE}_{fde}$, призванная аксиоматизировать все валидные утверждения о релевантном следовании между интуиционистскими высказываниями, *содержащими только связки $\&$, $\vee$ и $\sim$* . Эта система получается из $\mathbf{E}_{fde}$ путем замены схемы аксиом a7 на схему

$$a7'. A \rightarrow A.$$

Нетрудно проверить, что все схемы $\mathbf{IE}_{fde}$ являются валидными утверждениями о релевантном интуиционистском следовании, а правила вывода сохраняют эту валидность (при проверке правила r4 необходимо использовать Теорему 2). Однако доказательство полноты в общем виде (относительно обобщенных интуиционистских моделей) представляет довольно сложную (и еще не решенную) проблему. А именно, некоторые свойства интуиционистского отрицания (главным образом, необщезначимость формулы $\sim(A \& B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$) затрудняют нахождение адекватного определения канонической оценки.

Не менее сложную проблему представляет задача распространения $\mathbf{IE}_{fde}$ на множество *всех* интуиционистских высказываний (т.е. также и высказываний, включающих интуиционистскую импликацию $\supset$). Эта задача также еще ждет своего решения. По крайней мере ясно, что полная система $\mathbf{IE}_{fde}$ должна содержать следующие схемы аксиом для интуиционистской импликации:

- a8'. $A \rightarrow (B \supset A)$,
- a9'. $\sim A \rightarrow (A \supset B)$,
- a10'. $(A \supset B) \rightarrow ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
- a11'. $(A \supset (B \supset C)) \rightarrow (B \supset (A \supset C))$,
- a12'. $(A \supset (A \supset B)) \rightarrow (A \supset B)$,
- a13'. $(A \supset C) \rightarrow ((A \& B) \supset C)$.

Кроме того, должны выполняться следующие правила вывода:

- r5'. $A \rightarrow B / (B \supset C) \rightarrow (A \supset C)$,
- r6'. $A \rightarrow B / (C \supset A) \rightarrow (C \supset B)$.

На первый взгляд, принадлежность схем $a8'$ и $a9'$ системе *релевантного* следования может показаться спорной, поскольку они производят довольно “парадоксальное” впечатление. Схема $a8'$ вообще кажется подозрительно похожей на схему $A \rightarrow (B \supset B)$. Сходство это, однако, обманчиво. В последней схеме нечто утверждается непосредственно о связке следования $\rightarrow$, и если бы эта схема была валидной, она бы характеризовала – как парадоксальное – именно отношение следования. Действительно, здесь утверждается, что некоторый закон интуиционистской логики логически *следует* из произвольного высказывания. Поэтому схема $A \rightarrow (B \supset B)$ не является валидной. (Задание для “любопытного читателя” – проверить это, используя Определение 2.) В свою очередь, схема $a8'$ (также как и $a9'$) характеризует определенным образом собственно связку интуиционистской импликации. Поэтому, вовсе не удивительно, что эти схемы отражают парадоксальный характер этой связки. Так, схема $a8'$ говорит нам, что если некоторое высказывание является интуиционистски истинным, то его *интуиционистски влечет* произвольное высказывание, а схема $a9'$ утверждает, что если некоторое высказывание является интуиционистски опровергнутым, то оно *интуиционистски имплицирует* любое высказывание. Проводя аналогию с классическим случаем, можем заметить, что в классической логике $A \supset B$ эквивалентно $\sim A \vee B$. Таким образом, в $\mathbf{E}_{fde}$ аналогами схем $a8'$ и $a9'$ выступают просто схемы введения дизъюнкции. Вообще, схемы $a8'$ - $a13'$ и $r5'$ - $r6'$ выражают некоторые существенные свойства интуиционистской импликации: парадоксальность ($a8'$, $a9'$), транзитивность ($a10'$), неограниченная перестановочность антецедентов ($a11'$), сокращение повторяющихся антецедентов ($a12'$), ослабление антецедента ($a13'$), добавление “суффикса” и “префикса” ($r5'$ - $r6'$). Вопрос о том, достаточно ли этих схем для полной характеристики всех свойств интуиционистской импликации, остается пока открытым, как и решение проблемы полной аксиоматизации отношения релевантного интуиционистского следования в целом.

Литература

- [Войшвилло 1976] Войшвилло Е.К. Семантическая информация. Понятия экстенциональной и интенциональной информации // *Кибернетика и современное научное познание*. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
- [Войшвилло 1983] Войшвилло Е.К. Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // *Разум и культура*. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 69-76.
- [Войшвилло 1988] Войшвилло Е.К. *Философско-методологические аспекты релевантной логики*. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [Драгалин 1979] Драгалин А.Г. *Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств*. М.: Наука, 1979.

- [Орлов 1928] Орлов И.Е. Исчисление совместности предложений // *Математический сборник*. Т. 35, 1928. С. 263-286.
- [Смирнова 1986] Смирнова Е.Д. *Логическая семантика и философские основания логики*. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [Уэлз 1965] Уэлз Р. Мера субъективной информации // *Новое в лингвистике*. Вып. 4. М., 1965.
- [Шрамко 1989] Шрамко Я.В. К проблеме релевантного следования для интуиционистской логики // *Логико-философские исследования*. Вып. 1. М.: Философское общество СССР, 1989. С. 165-174.
- [Шрамко 1997] Шрамко Я.В. *Логическое следование и интуиционизм*. Киев: ВИПОЛ, 1997.
- [Ackermann 1956] Ackermann, W. Begründung einer strengen Implikation // *Journal of Symbolic Logic*. Vol. 21, 1956. P. 113-128
- [Entailment 1975] Anderson A.R. and N.D. Belnap, Jr., *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. I. Princeton University Press, 1975.
- [Entailment 1992] Anderson A.R., N.D. Belnap, Jr., and J.M. Dunn. *Entailment The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. II. Princeton University Press, 1992.
- [Asenjo 1966] Asenjo, F. A calculus of Antinomies // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. VII, 1966. P. 103-105.
- [Belnap 1977a] Belnap, N. A useful four-valued logic // J.M. Dunn and G. Epstein (eds.) *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*. D. Reidel Publish. Co. Dordrecht, 1977. P. 8-37 (Русский перевод в кн: Н. Белнап, Т. Стил. *Логика вопросов и ответов* М.: Прогресс, 1981).
- [Belnap 1977b] Belnap, N. How a computer should think // G. Ryle (ed.) *Contemporary Aspects of Philosophy*. Oriel Press Ltd. Stocksfield, 1977. P. 30-55 (Русский перевод в кн: Н. Белнап, Т. Стил. *Логика вопросов и ответов* М.: Прогресс, 1981).
- [Carnap 1947] Carnap, R. *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. Second edition. The University of Chicago Press. Chicago and London, 1988 (First edition - 1947) (русский перевод: Карнап Р. *Значение и необходимость*. М. 1959).
- [Došen 1992] Došen, K. The first axiomatisation of relevant logic // *Journal of Philosophical Logic* Vol. 21, 1992. P. 339-356.
- [Dunn 1966] Dunn, J.M. *The Algebra of Intensional Logics*. Doctoral Dissertation. University of Pittsburgh. Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).

- [Dunn 1971] Dunn, J.M. An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // *Journal of Symbolic Logic*. Vol. 36, 1971. P. 362-363.
- [Dunn 1976] Dunn, J.M. Intuitive semantics for first-degree entailment and coupled trees // *Philosophical Studies*. Vol. 29, 1976. P. 149-168.
- [Dunn 1986] Dunn, J.M. Relevance logic and entailment // *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III, eds. D. Gabbay and F. Guenter. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, 1986. P. 117-224.
- [Dunn 1999] Dunn, J.M. A Comparative study of various model-theoretic treatments of negation: a history of formal negation // D.M. Gabbay and H. Wansing (eds.) *What is Negation?* Applied Logic Series, 13. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 23-51.
- [Dunn 2000] Dunn, J.M. Partiality and its dual // *Studia Logica* (to appear).
- [Fitting 1969] Fitting, M. *Intuitionistic Logic. Model Theory and Forcing*. North-Holland. Amsterdam / London, 1969.
- [Fitting 1988] Fitting, M. Logic programming on a topological bilattice // *Fundamenta Informatica*. Vol. 11, 1988. P. 209-218.
- [Grzegorzczak 1964] Grzegorzczak, A. A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic // *Indagationes Mathematicae*, 26, 1964. P. 596-601.
- [Heyting 1956] Heyting A. *Intuitionism. An Introduction*. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Amsterdam, 1956 (русский перевод: А. Гейтинг. Интуиционизм. М.: Мир, 1965).
- [Kripke 1965] Kripke, S. A semantical analysis of intuitionistic logic. I // *Formal Systems and Recursive Functions*. Amst., 1965. P. 92-129.
- [Meyer 1978] Meyer R.K. *Why I Am Not a Relevantist*. Research paper. No. 2. Australian National University, Logic Group, Research School of the Social Sciences. Canberra, 1978.
- [Shramko 1999a] Shramko, Y. *Intuitionismus und Relevanz*. Logos-Verlag. Berlin, 1999.
- [Shramko 1999b] Shramko, Y. State-descriptions as a method of semantic analysis for intuitionistic logic // J. Nida-Rümelin (Ed.) *Rationality, Realism, Revision*. Berlin - New York, 1999. P. 110-118.
- [Shramko 2000] Shramko, Y. American plan for intuitionistic logic 1: an intuitive background // *The Logica Yearbook 1999*. Ed. Timothy Childers. Philosophia. Prague (to appear).
- [Voishvillo 1996] Voishvillo E.K. A theory of logical relevance // *Logique et Analyse*. Vol. 155-156, 1996. P. 207-228.