Я.В.Шрамко[1]

ОБОБЩЕННЫЕ ИСТИННОСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ: РЕШЕТКИ И МУЛЬТИРЕШЕТКИ

> Зачем же ты, бродяга, на базаре смущал народ, рассказывая про истину, о которой ты не имеешь представления? Что есть истина?
> (*М. Булгаков*. Мастер и Маргарита)

1. Готтлоб Фреге: истинностные значения как абстрактные объекты

Понятие *истинностного значения* ввел в логику выдающийся логик и философ конца XIX–начала XX ст. Г.Фреге (см. его статьи “Функция и понятие” и “О смысле и значении” в [10]). При этом он отказался от традиционной трактовки истинности как *свойства* высказываний. Хотя последняя трактовка во многом опирается на повседневную языковую интуицию, которая “подсказывает” нам, что, например, в утверждении “Высказывание '3 больше 2' истинно” речь идет о наличии у высказывания определенного свойства “быть истинным”, Фреге отмечает, что в данном случае обыденная языковая интуиция не проясняет существа дела, а скорее вводит нас в заблуждение. В самом деле, в утверждениях, подобных приведенному выше, предикат “истинный”, вообще говоря, излишен и, будучи легко элиминируемым из дискурса, не репрезентирует никакого реального свойства (см [10, с. 305]).

Вывод, к которому приходит Фреге, состоит в том, что истинность и ложность вовсе не являются свойствами высказываний, а представляют два *абстрактных предмета* – “**истину**” (das Wahre) и “**ложь**” (das Falsche), призванных служить в качестве *значений* высказываний (а именно их истинностных значений). Таким образом, в философии языка Фреге высказывания трактуются как специальный вид имен, обозначающих истину или ложь:

> “Предложение по существу есть собственное имя, значением которого, если таковое вообще имеется, является истинностное значение: истина или ложь” (перевод мой, ср. [10, с. 305]).

Эта идея лежит в основе Фрегевской концепции логики и его философии языка. Логика получает тем самым онтологическое обоснование и характеризуется как “наука о наиболее общих законах бытия истины” [10, с. 307]. Такой взгляд на предмет логики разделял также Лукасевич, который определял логику как науку об истинностных значениях:

> “Все истинные высказывания обозначают один и тот же объект, а именно истину, и все ложные высказывания обозначают один и тот же объект, а именно ложь. Я рассматриваю истину и ложь как единичные (singular) объекты... Онтологически аналогом истины является бытие, а лжи – небытие. Объекты, обозначаемые высказываниями, называются *логическими значениями*. ... Логика есть наука об особого рода объектах, а именно наука о *логических значениях*” ([38, с. 90]).

В рамках этой конструкции важную роль играет *функция истинностной оценки* (истинностная функция), которая представляет собой функцию из множества высказываний во множество истинностных значений, обеспечивая таким образом взаимосвязь между высказываниями и их значениями. Если в качестве последних принимается множество истинностных значений Фреге {T, F}, то функция истинностной оценки представляет собой *классическую* функцию истинности. Классическая *функция* истинности является всюду определенной. Таким образом, она приписывает каждому высказыванию какой-нибудь (и только один) элемент из указанного множества, обеспечивая тем самым соблюдение классических метапринципов *бивалентности* и *однозначности*: всякое высказывание является истинным или ложным и при этом исключается ситуация, когда высказывание является истинным и ложным одновременно.

Следует обратить внимание на то, что по Фреге истинностные значения являются особого рода *абстрактными* предметами. Иными словами, они аналогичны таким объектам, как числа, понятия и множества. В настоящей статье будет показано, что в последнем случае речь идет о чем-то большем, чем о простой аналогии. Можно утверждать, что в определенном смысле истинностные значения и *есть* множества. В данной статье предлагается некоторая точная экспликация истинностных значений *как* определенного вида *множеств*, а также рассматриваются структуры, задаваемые на множествах таких множеств.

2. Пресыщенные оценки и истинностно-значные провалы. Функция мультиоценки

Как известно, принципы бивалентности и однозначности восходят еще к Аристотелю. Тем не менее, общезначимость этих принципов неоднократно подвергалась сомнению. По-видимому, сам Аристотель был первым, кто подверг критике принцип бивалентности (в связи с проблемой так называемых "будущих случайных событий"). Лукасевич, рассмотрев эту проблему, пришел к идее трехзначной логики, инициировав тем самым целое направление современной неклассической логики – многозначную логику. Другое влиятельное течение неклассической логики, в рамках которого не принимается принцип бивалентности, так называемая "частичная логика" (*partial logic*).

В отличие от принципа бивалентности принцип однозначности гораздо реже подвергался сомнению. Тем не менее, некоторые авторы (и Лукасевич здесь также выступил одним из пионеров, см. [37]) выдвигали и выдвигают довольно веские аргументы в пользу той точки зрения, что в некоторых случаях от этого принципа необходимо (или "полезно") отказаться. Так возникают дискуссивная логика Яськовского [36], паранепротиворечивая логика Да Косты [21], исчисление антиномий Асеньо [17], логика парадокса Приста [40] и др.

Дж.М.Данн в ряде работ (см., напр. [22]; [24]) обосновал и развил новаторскую стратегию построения логической семантики, в которой высказывания не только могут принимать обычные значения "истина" или "ложь", но также допускаются случаи, когда некоторые высказывания одновременно принимают *оба* эти значения (т. е. являются одновременно истинными *и* ложными), или же не примают никакого из этих значений (*не* являются *ни* истинными, *ни* ложными). Первый из таких нестандартных случаев иногда называют "пресыщенной оценкой", а второй – "истинностно-значным провалом" (см. [9, гл. IV]). Истинностные провалы и пресыщенные оценки возможны (и необходимы) тогда, когда имеющаяся в наличии информация неполна или противоречива. Ситуации неполноты и противоречивости информации довольно часто встречаются в познавательной практике, так что истинностные провалы и пресыщенные оценки получают естественное интуитивное обоснование (ср. [1]; [2]; [48]).

Ясно, что классическая функция истинности не позволяет смоделировать такие нестандартные ситуации. Значит, отказ от принципов бивалентности и однозначности предполагает также отказ от классической функции истинности и использование вместо нее какой-нибудь иной семантической процедуры приписывания высказываниям истинностных значений (а возможно, и пересмотр самого понятия истинностного значения).

В [24] Данн предлагает *два* разных способа построения такой процедуры. Первый способ заключается в том, что вместо функции истинности можно использовать просто двуместное *отношение* между множеством высказываний и множеством истинностных значений {T, F}. В этом случае истинностная оценка понимается как некоторое отношение, которое *не обязательно является функциональным*. Такая оценка соотносит с каждым предложением либо *какое-то одно* из имеющихся двух истинностных значений (тогда она ведет себя в точности как классическая функция истинности), либо не соотносит с ним *никакого* значения (не всюду определенная функция), либо ставит ему в соответствие сразу *оба* истинностных значения (нефункциональное отношение). Для определенной таким образом истинностной оценки принципы бивалентности и однозначности очевидным образом не выполняются.

Нужно, однако, отметить, что в одном принципиальном аспекте указанный способ не вполне отвечает онтологической концепции Фреге, где в качестве фундаментальных онтологических категорий принимаются категории *предмета* и *функции* (см. "Функция и понятие" и "О понятии и предмете" в [10]). Поэтому, с философской точки зрения, предпочтительнее выглядит другой способ обобщения классической функции истинности, рассматриваемый Данном, который состоит в том, что истинностная оценка продолжает трактоваться как функция, но в качестве множества значений этой функции выступают теперь не *элементы* множества {T, F}, а *подмножества* данного множества (включая и пустое множество). В [47] понимаемую таким образом обобщенную функцию истинности предлагается называть *функцией мультиоценки* (или мультиоценочной функцией; см также [13]). В результате применения к какому-нибудь высказыванию функции мультиоценки наряду с "обычными" (классическими) приписываниями {T}, {F} получаем два новых возможных приписывания: {} (истинностно-значный провал) и {T,F} (пресыщенная оценка). Использование обобщенной функции истинности позволяет отказаться от принципов бивалентности и однозначности и довольно естественным образом смоделировать неполные и противоречивые познавательные ситуации, о которых упоминалось выше.

3. Обобщенные истинностные значения. Четырехзначная логика и двойные решетки

По существу введение функции мультиоценки означает не только интересное обобщение классической функции истинности, но и влечет за собой важное обобщение самого понятия *истинностного значения*. Первым на это обратил внимание Н. Белнап, который в своих статьях [18]; [19] предложил рассмотреть "полезную четырехзначную логику". При этом он исходил из "компьютеризированной" интерпретации тех абстрактных эпистемических ситуаций, о которых идет речь в [24]. В самом деле, компьютеру часто приходится иметь дело с *неполной* и/или *противоречивой* информацией. Тем не менее, было бы желательно, чтобы компьютер, даже столкнувшись с такого рода базами данных, все же продолжал работать с определенной степенью надежности.

Пусть под истинностным значением некоторого высказывания понимается та информация (о данном высказывании), которая была *сообщена* компьютеру. Тогда, наряду с "нормальными" ситуациям, когда компьютеру сообщается, что высказывание является истиннным либо ложным, мы должны принимать во внимание и ситуации (к сожалению, довольно часто встречающиеся в практике), когда компьютеру не было предоставлено никакой определенной информации, либо была предоставлена ("введена") противоречивая информация. Последняя ситуация вполне может иметь место, если компьютер получает данные из различных источников, данные вводятся в разное время, или же, когда противоречие содержится в данных лишь *неявным* образом.

Таким образом, мы получаем следующие *четыре* истинностные значения, соответствующие четырем возможным эпистемическим ситуациям (заметим, что эти четыре значения в точности совпадают с отмеченными выше возможными приписываниями мультиоценочной функции):

T = {T} – компьютеру была сообщена *только* истина;

F = {F} – компьютеру была сообщена *только* ложь;

B = {T, F} – компьютеру были сообщены *одновременно* истина *и* ложь;

N = { }– компьютеру не были сообщены *ни* истина, *ни* ложь.

Эти новые значения истинности могут быть названы *обобщенными истинностными значениями*[1]. Иными словами, можно утверждать, что применение мультиоценочной функции к некото-

[1] Ясно, что ссылка на компьютер не является обязательной, она играет здесь определенную *прикладную* (или эвристическую) роль, от которой при желании (или необходимости) легко можно абстрагироваться.

рому исходному множеству “обычных” истинностных значений дает нам множество обобщенных истинностных значений, каждое из которых представляет собой некоторое подмножество исходного множества (включая, конечно, и пустое множество). Переход к понятию обобщенного истинностного значения вполне соответствует Фрегевской трактовке истинностных значений как абстрактных объектов. Как уже отмечалось выше, типичным примером такого рода (математических и логических) объектов являются множества, поэтому резонно рассмотреть истинностные значения именно как некоторые множества, что и происходит в понятии обобщенного истинностного значения.

Белнап отметил, что четыре обобщенных истинностных значения образуют *решетку*, которую он называет “логическая решетка **L4**”. Напомним, что частично упорядоченное множество называется решеткой, если для любых двух элементов из этого множества существуют наименьшая верхняя и наибольшая нижняя грани. Графически решетка **L4** может быть представлена посредством диаграммы Хассе, как на рис. 1 слева (см. Приложение). Решеточный порядок направлен здесь снизу вверх и располагает элементы в порядке возрастания их истинности. Эта решетка является “логической”, поскольку задаваемые на ней операции объединения ($\vee$) и пересечения ($\wedge$) представляют логические операции дизъюнкции и конъюнкции соответственно. Например, $\mathbf{T} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$, $\mathbf{N} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}$, $\mathbf{N} \vee \mathbf{B} = \mathbf{T}$, и т.д. Операция же, которая обращает решеточный порядок, представляет операцию логического отрицания: $\sim\mathbf{T} = \mathbf{F}$, $\sim\mathbf{F} = \mathbf{T}$, $\sim\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\sim\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Белнап замечает, что те же самые четыре истинностные значения образуют и другую решетку, так называемую *аппроксимационную решетку*[1], которую он называет **A4**. Решеточный порядок на **A4** может быть интерпретирован как своего рода “информационный порядок”: чем “выше” находится элемент данной решетки, тем больше информации он несет (см. рис. 1, справа). **N** является нижней точкой (“нулем”) решетки **A4**, поскольку не заключает в себе вообще никакой информации, а **B** является вершиной (“единицей”) этой решетки, так как сообщает максимальное количество (вообще-то, противоречивой) информации.

Следующая интересная идея состоит в том, чтобы попробовать осуществить комбинацию этих двух решеток и рассмотреть их в качестве единой структуры. Первым эту идею высказал и реализовал Гинсберг, введя в [33] и [34] понятие *двойной решетки* (или бирешетки – *bilattice*). *Бирешетка* представляет собой непустое

[1] Понятие аппроксимационной решетки было предложено Д.Скоттом [43].

множество с *двумя* частичными порядками – $\leq_i$ и $\leq_t$, каждый из которых образует на этом множестве полную решетку. Содержательно $\leq_i$ представляет возрастание информации, а $\leq_t$ – возрастание истинности элементов, образующих двойную решетку. Комбинация **L4** и **A4** дает нам наиболее простую нетривиальную бирешетку, которую мы будем называть $FOUR_2$. Графически эта бирешетка представлена на рис. 2 посредством двойной диаграммы Хассе, помещенной в координатную плоскость, где ось абсцисс репрезентирует логический порядок, а ось ординат – информационный.

Бирешетки довольно хорошо изучены в литературе (см. [16]; [28]; [41]). Фиттинг (см. [29, с. 225]) охарактеризовал такие решетки как *обобщенные истинностно-значные пространства* и подчеркнул важность изучения этих пространств с точки зрения теории истины. Существенным, однако, представляется то обстоятельство, что "истина" и "ложь", которые служат в качестве "базиса" для бирешеток (в первую очередь для $FOUR_2$) представляют собой *классические* истинностные значения. Можно предположить, что обобщение понятия истинностного значения для различных *неклассических* логик даст нам обобщенные истинностно-значные пространства, отличающиеся от классического. Например, интересно посмотреть, какого рода структура получится, если применить мультиоценочный подход к истинностным значениям *конструктивной логики*.

4. Истина и ложь в конструктивной логике

Что значит для логики быть конструктивной? Иными словами, каков критерий, позволяющий охарактеризовать ту или иную логическую систему как конструктивную? Существует довольно много логических систем, причисляемых к числу конструктивных: интуиционистская логика Гейтинга, минимальная логика Иогансона, конструктивная логика Маркова, логика конструктивной ложности Нельсона, семейство суперинтуиционистских логик и т.д. С семантической точки зрения отличительным признаком конструктивных логических систем является используемое в них особое понятие истины, которое существенным образом отличается от классического понятия истины. В любой конструктивной логике принимается то, что может быть названо *конструктивной концепцией истины*. Согласно этой концепции, высказывание считается истинным тогда и только тогда, когда оно является *конструктивно доказанным*, т.е. когда имеется эффективная процедура, позволяющая построить (получить) доказательство данного высказывания. Во избежание круга само понятие конструктивного доказательства вводится посредством стандартного индуктивного определения, фиксируя сначала, что представляет собой конструктивное доказательство атомарных высказываний, а затем распространяя это понятие на высказывания, содержащие логические константы.

Важным свойством конструктивной истины является *свойство сохранности* (иногда называемое также свойством монотонности): высказывание, будучи однажды доказанным, остается таким и в дальнейшем[1]. Конструктивно истинное высказывание никогда не перестает быть таковым – множество доказанных утверждений может только расширяться. Данное свойство представляет собой, конечно, довольно сильную идеализацию. Но именно эта идеализация выражает суть конструктивной концепции истины в отличие от классической (корреспондентской) концепции. Для установления конструктивной истинности того или иного высказывания первостепенное значение имеет построение идеальной (теоретической) конструкции, доказывающей это высказывание, а не его эмпирическая проверка (соотнесение высказывания с действительностью). Что касается действительности, то конструктивный подход возможен лишь по отношению к действительности особого рода, например, "действительности" абстрактных математических объектов. С точки зрения конструктивной логики, действительность остается неизменной, изменяются лишь наши знания, причем только кумулятивным образом.

Однако если относительно понятия истины все конструктивные логики более или менее едины, то относительно понятия *ложности* такого единства не наблюдается. Так, если мы обратимся к интуиционистской логике, то обнаружим, что примечательной особенностью интуиционистской концепции ложности является то, что здесь это понятие не является *непосредственным* представителем объектной связки отрицания (или, наоборот, интуиционистское отрицание не является непосредственным представителем интуиционистской ложности). Интуиционистской "лжи" скорее соответствует то, что А.Гейтинг называл "фактическим отрицанием" (см. [35, стр. 19]), которое представляет собой связку метаязыка и, по существу, имеет классический характер. Утверждение "высказывание *A* является ложным" означает в интуиционизме, как и в классике, "*A* не является истинным". То есть

[1] Ср. [4, с. 18]: "Мы принимаем *принцип сохранности*, состоящий в том, что если истинность некоторого суждения обнаружена, то оно остается истинным и в будущем". В англоязычной литературе этот принцип часто называют "условием наследственности" – *hereditary condition*.

интуиционисткая ложь есть не что иное, как интуиционистская “не-истинность”, а значит, истинностные значения в интуиционизме, так же как и классические истинностные значения, подчиняются принципам бивалентности и однозначности. С учетом же конструктивной концепции истинности это означает, что интуиционистская ложность высказывания *A* интерпретируется как “*A не* является конструктивно доказанным”. Таким образом, интуиционистская ложь, в отличие от интуиционистской истины, *не* является конструктивным понятием. В самом деле, в данный момент мы можем не располагать доказательством того или иного высказывания, однако это вовсе не исключает возможности того, что доказательство будет найдено позже. То есть интуиционистски ложное высказывание вполне может перестать быть таковым, а значит, интуиционистская ложность (в отличие от интуиционистской истинности) *не* подчиняется принципу сохранности. Зато она обладает свойством *обратной сохранности*: если высказывание является ложным сейчас, это означает, что оно *было* таковым всегда (в прошлом). Иными словами, в то время как множество истинных высказываний может с течением времени только расти (принцип конструктивной истины), множество ложных высказываний может только убывать (принцип неконструктивной ложности).

Интуиционистское понятие ложности используется, однако, далеко не во всех конструктивных логиках, иными словами, интуиционистская концепция ложности не является единственной, принятой в рамках конструктивной традиции в широком смысле. Так, в 1949 г. Д.Нельсон построил особый вариант конструктивной логики, в которой устраняется присущая интуиционизму *асимметрия* между истиной и ложью (ср. также [5]). Основная идея заключается здесь в том, что ложность также рассматривается как *конструктивное понятие*, которое вводится “способом, аналогичным тому, как это происходит в случае с интуиционистской истиной” ([15, с. 231]). Если задействовать терминологию, заимствованную из теории доказательств, то наряду с понятием “доказательства” можно ввести параллельное (независимое) понятие “опровержения”. Теперь, аналогично тому как выражение “*A* является (конструктивно) истинным” интерпретируется в смысле “*A* доказано”, выражение “*A* является (конструктивно) ложным” может быть истолковано в смысле “*A* опровергнуто”. При таком истолковании ложность некоторого высказывания также представляет “конструктивное знание”, которое подчиняется принципу сохранности: то, что является опровергнутым на определенной стадии развития знания, продолжает оставаться таковым и в дальнейшем – множество ложных высказываний, точно также как и множество истинных высказываний, может лишь увеличиваться.

Подведем итоги. Хотя все конструктивные логики разделяют схожую – конструктивную – концепцию истины, однако некоторые из них существенным образом разнятся относительно принимаемой концепции ложности. В целом в конструктивной логике можно выделить *два* различных понимания ложности. В соответствии с одним из них, характерным для интуиционистской логики, ложность высказывания означает просто его недоказанность. В другом же случае (логика Нельсона) ложность предстает в качестве конструктивного напарника понятия истины: "*A* ложно" означает "*A* опровергнуто".

Истолковывая же понятия истинности и ложности в духе подхода Фреге, приходим к выводу, что в конструктивных логиках вводятся три новых абстрактных объекта, которые могут приписываться высказываниям в качестве истинностных значений: *T* – "конструктивная истина", *F* – "конструктивная ложь" и *f* – "неконструктивная ложь".

5. Функция мультиоценки для конструктивных значений истинности. Понятие неконструктивной истины

Каким образом мультифункциональный подход может быть распространен на область конструктивной логики? Прежде всего важно отметить, что в конструктивной логике истинностные значения в гораздо большей степени, чем в классической логике, являются *относительными* понятиями. Собственно говоря, и в классике истинность (и ложность) представляет не просто значение высказывания, а, скорее, значение высказывания *в мире*, т.е. некоторое отношение между высказыванием и миром. Многие исследователи, однако, отмечают, что классическая логика может быть истолкована как логика только нашего (т. е. одного) мира. Таким образом, при фиксации этого мира ссылка на него может быть просто опущена. Если же речь идет о доказательствах (как в конструктивной концепции истинности), то особое значение приобретает вопрос, *в рамках какой теории* (теоретической конструкции) произведено то или иное доказательство (или на какой стадии развития теории доказательство было получено). Вообще, говорить, что высказывание является доказанным или не доказанным, не уточняя при этом, в какой теории это имеет место, просто-напросто беспредметно. Поэтому утверждение "высказывание *A* является конструктивно истинным" следует каждый раз понимать как "высказывание *A* является доказанным в рамках (определенной) теоретической конструкции *a*". Значит, конструктивная функция истинности не просто отображает высказывания во множество истинностных значений, она должна учитывать в качестве особого *параметра* некоторую возможную теоретическую конструкцию, *относительно которой* осуществляются доказательства высказываний. Пусть $\boldsymbol{L}$ есть множество высказываний, а $\boldsymbol{U}$ представляет собой множество теоретических конструкций (или множество состояний теории). Тогда конструктивная функция истинности представляет собой функцию из множества $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}$ во множество истинностных значений той или иной конструктивной логики. Таким образом, построение модели для конструктивной логики существенным образом зависит от того, какого рода множество выбрано в качестве "множества возможных миров" ($\boldsymbol{U}$).

В конструктивной логике имеется традиция построения семантики с использованием так называемого "отношения вынуждения" как отношения, непосредственно связывающего высказывание с тем или иным "возможным миром". В этом случае происходит смещение акцента с отношения между высказыванием и истинностным значением на отношение между высказыванием и миром. Пусть p является некоторым атомарным высказыванием. Тогда вместо конструкции "высказывание p является истинным (ложным) в мире a" используется конструкция "мир a вынуждает (не вынуждает) высказывание p". Технически оба способа построения семантики являются эквивалентными и взаимопереводимыми (подробнее см. [13, с. 13-16]).

Вернемся теперь к вопросу о том, как может выглядеть функция мультиоценки применительно к конструктивной логике. Вначале рассмотрим истинностные значения логики Нельсона. В [27] Данн исследовал семейство *обобщенных логик Нельсона*, которые возникают, в частности, при допущении истинностно-значных провалов и/или пресыщенных оценок в отношениях между конструктивной истиной и конструктивной ложью. Воспроизведем общую идею построения "мультиоценочной семантики" на основе истинностных значений логики Нельсона (см. также [47, с. 771]). *Обобщенной Нельсоновской моделью* назовем четверку

$$<W, \leq, \Vdash_T, \Vdash_F>,$$

где W есть некоторое непустое множество, $\leq$ – частичный порядок на W, а $\Vdash_T$ и $\Vdash_F$ представляют собой два различных отношения вынуждения между элементами из W и предложениями языка, которые для каждого атомарного высказывания p_i определяются с соблюдением следующих условий (для любых a и b из W):

Условие 1 (*прямая сохранность*).

$a \Vdash_T p_i$ и $a \leq b \Rightarrow b \Vdash_T p_i$;
$a \Vdash_F p_i$ и $a \leq b \Rightarrow b \Vdash_F p_i$.

Для сложных высказываний отношения вынуждения определяются следующим образом:

Определение 1.

$a \Vdash_T {\sim}A \Leftrightarrow a \Vdash_F A$;
$a \Vdash_F {\sim}A \Leftrightarrow a \Vdash_T A$;

$a \Vdash_T A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_F A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_F A$ или $a \Vdash_F B$;

$a \Vdash_T A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ или $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_F A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_F A$ и $a \Vdash_F B$;

$a \Vdash_T A \supset B \Leftrightarrow \forall b \geq a$ ($b \Vdash_F A$ или $b \Vdash_T B$);
$a \Vdash_F A \supset B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_F B$.

Ключевое семантическое отношение, которое может быть здесь определено, есть отношение *релевантного логического следования* для конструктивной логики Нельсона. Из высказывания A *релевантно следует* высказывание B, если и только если для любой Нельсоновской модели, в любом мире a этой модели: $a \Vdash_T A \Rightarrow a \Vdash_T B$.

Содержательно, элементы множества W могут быть истолкованы как теоретические конструкции или состояния некоторой конструктивной теории на различных стадиях ее развития. Отношение $\leq$ представляет тогда возможное отношение во времени между теоретическими конструкциями: $a \leq b$ означает, что состояние теории b есть возможный результат развития состояния a. При построении этой семантики вместо одного (обычного) отношения вынуждения (представляющего понятие истины) вводятся *два* новых равноправных отношения вынуждения – отдельно для истины и для лжи. Выражение $a \Vdash_T A$ может быть истолковано как “состояние теории *a вынуждает (конструктивную) истинность* высказывания A”, а выражение $a \Vdash_F A$ – как “состояние теории *a вынуждает (конструктивную) ложность* высказывания A”. Другое возможное истолкование выражения $a \Vdash_T A$ – “высказывание A доказано в рамках теоретической конструкции a”, и $a \Vdash_F$, A – “высказывание A опровергнуто в рамках теоретической конструкции a”. Условие 1 выражает конструктивный характер обоих отношений.

Заметим, что для $\Vdash_T$ и $\Vdash_F$ вовсе не обязательно выполняются принципы бивалентности и однозначности: вполне возможны как случаи, когда высказывание не является ни доказанным ни опровергнутым, так и случаи (если подразумеваемая теория противоречива), когда высказывание одновременно оказывается доказанным и опровергнутым (в рамках такой противоречивой теории). Иными словами, функция мультиоценки, определяемая посредством отношений $\Vdash_T$ и $\Vdash_F$, приписывает каждому высказыванию одно из четырех обобщенных истинностных значений логики Нельсона: $\{T,F\}$, $\{T\}$, $\{F\}$ или $\{\}$. Если одновременно имеем $a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_F A$, то это означает, что значением высказывания A в мире a есть $\{T,F\}$, если имеем только $a \Vdash_T A$, то значением A в мире a есть $\{T\}$, если только $a \Vdash_F A$, то значением высказывания A в мире a есть $\{F\}$, а если же не имеем ни того, ни другого, то значением высказывания A будет $\{\}$.

Обратимся теперь к истинностным значениям интуиционистской логики и рассмотрим возможности применения к этим значениям мультиоценочной функции. В [11]; [12]; [13]; [46] была построена семантика релевантного следования для интуиционистской логики с использованием пресыщенных оценок и истинностно-значных провалов. *Обобщенной интуиционистской моделью* назовем четверку

$$<W, \leq, \Vdash_T, \Vdash_f>,$$

где W, $\leq$, и $\Vdash_T$, определяются точно так же, как и для обобщенных моделей Нельсона, а $\Vdash_f$ есть новое отношение вынуждения для неконструктивной (интуиционистской) ложности, которое определяется для каждого атомарного высказывания с соблюдением следующего условия:

Условие 2 (*обратная сохранность*)
$b \Vdash_f p_i$ и $a \leq b \Rightarrow a \Vdash_f p_i$.

Определения условий истинности и ложности для сложных высказываний являются стандартными для интуиционистских связок с учетом того, что условия ложности должны теперь задаваться независимо от условий истинности:

Определение 2.

$a \Vdash_T \sim A \Leftrightarrow \forall b \geq a\ (b \Vdash_f A)$;
$a \Vdash_f \sim A \Leftrightarrow \exists b \geq a\ (b \Vdash_T A)$;

$a \Vdash_T A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ и $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_f A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash_f A$ или $a \Vdash_f B$;

$a \Vdash_T A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_T A$ или $a \Vdash_T B$;
$a \Vdash_f A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash_f A$ и $a \Vdash_f B$;

$a \Vdash_T A \supset B \Leftrightarrow \forall b \geq a\ (b \Vdash_f A$ или $b \Vdash_T B)$;
$a \Vdash_f A \supset B \Leftrightarrow \exists b \geq a\ (b \Vdash_T A$ и $b \Vdash_f B)$.

Отношение релевантного логического следования формально определяется так же, как и в обобщенных моделях Нельсона, представляя теперь отношение релевантного логического следования для формул интуиционистской логики. Обобщенными истинностными значениями интуиционистской логики будут множества $\{T,f\}$, $\{T\}$, $\{f\}$ и $\{\}$.

Обратим внимание на то, что в мультиоценочной семантике не принимается обычное условие $a \Vdash_f A \Leftrightarrow$ не ($a \Vdash_T A$), при принятии которого получается стандартная семантика для интуиционистской логики. Вообще отношение $\Vdash_f$ значительно слабее отношения $\Vdash_F$. Содержательно это отношение может быть истолковано как "отношение отвержимости". Выражение $a \Vdash_f A$ означает "высказывание *A может быть отвергнуто* в рамках теоретической конструкции *a*". Оно говорит нам, что *пока что* мы не имеем достаточных оснований для включения высказывания *A* в нашу теорию (или мы имеем достаточно оснований для *не включения A* в нашу теорию), например, поскольку данное высказывание не доказано. Поэтому мы отмечаем, что высказывание *A* может быть отвергнуто (оно находится *под подозрением*), хотя этим вовсе не исключается, что позднее (например, когда высказывание будет доказано) оно все же будет включено в нашу теорию. Таким образом, отношение $\Vdash_f$ ведет себя так, как и должна вести себя интуиционистская (неконструктивная) ложь: для него выполняется условие обратной сохранности, но условие "сохранности в будущее" не выполняется.

Итак, комбинируя "попарно" истинностные значения, которые мы находим в различных конструктивных логиках, мы получили две различные "четырехзначные семантики": одну для "релевантной логики Нельсона", а другую для "релевантной интуиционистской логики". Данн высказал идею объединения этих двух семантик в рамках некоторой единой конструкции. Эта идея была реализована в [47].

Мы начинаем с того, что "механически" объединяем истинностные значения, которые встречаются в различных конструктивных логиках, в единое множество $\{T,F,f\}$. Ясно, что функция мультиоценки, будучи примененной к этому множеству, даст нам *более четырех* обобщенных истинностных значений[1]. Однако пре-

---

[1] В общем виде идея рассмотреть в качестве базиса для обобщенных истинностных значений множества, содержащие более двух элементов, была сформулирована А.Карпенко, который в связи с семантикой Данна и Белнапа высказал следующую мысль: "Интересно посмотреть, что представляет собой обобщение подобной семантики, т.е. когда в качестве истинностных значений берутся подмножества более богатого множества, чем {T, F}" ([6, с. 46)].

жде рассмотрим множество $\{T,F,f\}$ более внимательно. Оно производит довольно "кривобокое" впечатление. Причем "кривобокость" эта является двоякой: во-первых, данное множество содержит два элемента для ложности (F, f) и только один элемент для истины (T), а во-вторых, оно содержит два конструктивных элемента (T, F) и только один неконструктивный элемент (f). Несложно видеть, почему возникла такая асимметричная ситуация: конструктивная истина, в отличие от конструктивной ложности, не имеет неконструктивного "двойника"! Чтобы восстановить справедливость, мы должны ввести еще одно базисное значение истинности – *неконструктивную истину*. Обозначим это новое истинностное значение посредством t. Ему соответствует особое отношение вынуждения $\Vdash_t$. Выражение $a \Vdash_t A$ можно понимать как "высказывание A является *приемлемым* в рамках теоретической конструкции a". Это есть понятие (временного) принятия того или иного высказывания, когда мы по тем или иным причинам рассматриваем высказывание как приемлемое (мы его *толерируем*), хотя, возможно, мы пока и не имеем доказательства данного высказывания. При этом вовсе не исключается возможность, что высказывание, в конце концов, окажется опровергнутым и мы в дальнейшем будем вынуждены от него отказаться. Соответствующим условием, выражающим неконструктивный характер этого понятия, будет

Условие 3 (*обратная сохранность*)
$b \Vdash_t p_i$ и $a \leq b \Rightarrow a \Vdash_t p_i$.

Как и в случае с неконструктивной ложностью, в общем случае мы не принимаем ("обычное") условие $a \Vdash_t A \Leftrightarrow$ не ($a \Vdash_F A$). В соответствии с мультиоценочным подходом *все четыре* исходные истинностные значения являются независимыми друг от друга и не связаны никакими отношениями. Таким образом, возможно появление "ненормальных" ситуаций, когда, несмотря на то, что высказывание является опровергнутым, оно все же считается приемлемым, или высказывание отвергается, несмотря на то, что оно является доказанным. Такого рода ситуации вполне могут иметь место, например, в условиях противоречивой информации, или же когда люди ведут себя иррациональным образом. Это, конечно, не исключает возможности введения дополнительных условий, запрещающих те или иные комбинации исходных истинностных значений. Некоторые из этих условий будут рассмотрены ниже.

6. Обобщенное истинностно-значное пространство конструктивной логики. Тройная решетка

Итак, в качестве базиса для обобщенного конструктивного истинностно-значного пространства мы рассматриваем множество значений <*T*, *F*, *t*, *f*>. Напомним еще раз их содержательный смысл:

T (конструктивная истина) – высказывание является конструктивно *доказанным*;

F (конструктивная ложь) – высказывание является конструктивно *опровергнутым*;

t (неконструктивная истина) – высказывание является *приемлемым*;

f (неконструктивная ложь) – высказывание является *отвергаемым*.

Применяя к этим исходным значениям функцию мультиоценки, мы должны рассмотреть все их возможные комбинации, т.е. множество всех подмножеств данного множества. Это дает нам следующие 16 обобщенных истинностных значений:

$$\{\}, \{T\}, \{F\}, \{t\}, \{f\}, \{T,F\}, \{T,t\}, \{T,f\}, \{F,t\}, \{F,f\}, \{t,f\}, \{T,F,t\}, \{T,F,f\}, \{T,t,f\}, \{F,t,f\}, \{T,F,t,f\}.$$

В дальнейшем "пустое" значение {} будем обозначать посредством ***N***, а "максимальное" значение $\{T,F,t,f\}$ – посредством ***A***. Кроме того, при обозначении остальных обобщенных истинностных значений будем использовать жирный шрифт, опуская фигурные скобки и запятые.

Вернемся теперь к понятию бирешетки. Интуитивно двойная решетка представляет собой структуру, каждый элемент которой в той или иной *степени* воплощает *два* базисных свойства, являющихся в некотором смысле *существенными* для этих элементов: свойство "информативности" и свойство "истинности"[1]. Соответственно, два частичных порядка бирешетки - $\leq_i$ и $\leq_t$, – располагают элементы в зависимости от степени обладания данными свойствами.

Если мы имеем дело с истинностными значениями конструктивной логики, то должны принимать во внимание еще одно важное свойство, существенным образом характеризующее каждое из этих значений, а именно свойство *конструктивности*. В самом деле, каждое из образованных выше 16 обобщенных истинностных

[1] Итак, истинность вновь конституирует себя как *свойство*, однако теперь уже *не* как свойство высказываний, а как свойство особого рода абстрактных объектов (истинностных значений) – *быть самими собой*.

значений конструктивной логики, сочетая в себе как конструктивные, так и неконструктивные элементы, заключает в себе не только определенную степень информативности и истинности, но также и определенную степень конструктивности. Таким образом, мы получаем третий частичный порядок – $\leq_c$ –, упорядочивающий 16 истинностных значений *по их конструктивности*. Относительно этого нового частичного порядка мы также имеем полную решетку, что дает нам возможность ввести понятие *тройной решетки* (или трирешетки - *trilattice*):

Определение 3. *Трирешетка* есть структура $(S, \leq_i, \leq_t, \leq_c)$, где S – есть непустое множество, и $(S, \leq_i)$, $(S, \leq_t)$, $(S, \leq_c)$ суть полные решетки.

Для определенных выше 16 обобщенных истинностных значений ***A*** и ***N*** являются соответственно единицей и нулем решетки относительно $\leq_i$, ***Tt*** и ***Ff*** – относительно $\leq_t$, а ***TF*** и ***tf*** – относительно $\leq_c$. В самом деле, ***A*** и ***N*** являются наиболее и наименее *информативными* элементами, ***Tt*** и ***Ff*** – наиболее и наименее *истинными* элементами, а ***TF*** и ***tf*** – наиболее и наименее *конструктивными* элементами.

Пусть x есть произвольное обобщенное истинностное значение конструктивной логики. Обозначим посредством x^{Tt} множество, содержащее в точности те значения T или t, которые входят в x. (Например, если x есть ***TFf***, то x^{Tt} есть $\{T\}$.) Множества x^{Ff}, x^{TF}, x^{tf} определяются аналогичным образом. Тогда три частичных порядка, о которых шла речь выше, можно определить так:

Определение 4. Для любых обобщенных истинностных значений конструктивной логики x и y:

1. $x \leq_i y \Leftrightarrow x \subseteq y$;
2. $x \leq_t y \Leftrightarrow x^{Tt} \subseteq y^{Tt}$ и $y^{Ff} \subseteq x^{Ff}$;
3. $x \leq_c y \Leftrightarrow x^{TF} \subseteq y^{TF}$ и $y^{tf} \subseteq x^{tf}$.

Таким образом, мы получаем наиболее общую тройную решетку, генерируемую шестнадцатью обобщенными значениями истинности конструктивной логики – $SIXTEEN_3$, которая представлена на рис. 3 посредством диаграммы Хассе, помещенной в трехмерную систему координат. По сравнению с диаграммами для бирешетки, здесь появляется новая ось, представляющая третье, а именно конструктивное “измерение”.

Ясно, что для каждого из этих частичных порядков существуют соответствующие операции пересечения и объединения. Будем использовать символы $\wedge$ и $\vee$ для пересечения и объединения относительно $\leq_t$, $\cap$ и $\cup$ – для этих операций относительно $\leq_i$, а также Δ и ∇ – для решеточных операций относительно $\leq_c$.

Операции $\wedge$ и $\vee$ представляют по существу логические операции конъюнкции и дизъюнкции. Интересно проследить, как ведут себя эти операции применительно к конкретным обобщенным истинностным значениям. Если, к примеру, результаты $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{t} \vee \boldsymbol{f}$ являются вполне ожидаемыми, то поведение $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{t}$ может показаться довольно странным. Как можно видеть, в последнем случае результатом является $\boldsymbol{N}$. Иными словами, конъюнкция двух "истин" дает "ничего". Более близкое рассмотрение убеждает, однако, в том, что результат здесь вполне закономерен. В самом деле, конъюнкция является истинной, если оба ее конъюнкта истинны. Это верно как для $\boldsymbol{T}$, так и для $\boldsymbol{t}$. Ясно, что $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{t}$ не может в результате иметь значение $\boldsymbol{T}$ (и даже содержать его в качестве составной части), поскольку неверно, что *оба* конъюнкта имеют это значение, и то же самое имеет место для $\boldsymbol{t}$. Однако было бы также неверно приписать конъюнкции двух истин (без какой-либо "примеси" лжи) какое-либо из значений $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{f}$! Итак, остается только $\boldsymbol{N}$, как это и получается в соответствии с логическим порядком трирешетки $SIXTEEN_3$. Аналогичные рассуждения применимы и в случае с $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{f}$, как и в других аналогичных случаях.

Решеточные операции, соответствующие информационному порядку, могут быть истолкованы как операции пересечения и объединения "кусков информации". В [30] $\cap$ интерпретируется как оператор "консенсуса", а $\cup$ – как оператор "доверчивости".

Что касается операций Δ и ∇, то их можно довольно естественным образом истолковать как операции с "конструктивными частями" обобщенных истинностных значений. Каждое из этих значений имеет как конструктивную, так и неконструктивную часть. Δ осуществляет пересечение конструктивных частей двух истинностных значений и объединяет их неконструктивные части, а ∇ работает двойственным образом.

Обычно на двойных решетках вводится оператор *отрицания*, который определяется как операция, которая обращает логический порядок, оставляя информационный порядок без изменений. Фиттинг в [30] аналогичным образом вводит оператор *конфляции* (*conflation*), который обращает информационный порядок, не затрагивая при этом логический порядок.

Рассмотрим три частичных порядка, которые задаются на тройной решетке, и введем под общим названием *инверсии* такой тип операции, который обращает по крайней мере некоторые из этих порядков. В общем виде это может быть сделано посредством следующего определения:

Определение 5. Во всякой трирешетке унарная операция типа *инверсии* есть одна из операций, обладающая следующими свойствами:

1. *T-инверсия* ($\sim_t$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_t b \leq_t \sim_t a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_t a \leq_i \sim_t b$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_t a \leq_c \sim_t b$;
   (d) $\sim_t \sim_t a = a$.
2. *I-инверсия* ($\sim_i$):
   (a) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_i b \leq_i \sim_i a$;
   (b) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_i a \leq_t \sim_i b$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_i a \leq_c \sim_i b$;
   (d) $\sim_i \sim_i a = a$.
3. *C-инверсия* ($\sim_c$):
   (a) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_c b \leq_c \sim_c a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_c a \leq_i \sim_c b$;
   (c) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_c a \leq_t \sim_c b$;
   (d) $\sim_c \sim_c a = a$.
4. *Tc-инверсия* ($\sim_{tc}$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{tc} b \leq_t \sim_{tc} a$;
   (b) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{tc} b \leq_c \sim_{tc} a$;
   (c) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{tc} a \leq_i \sim_{tc} b$;
   (d) $\sim_{tc} \sim_{tc} a = a$.
5. *It-инверсия* ($\sim_{it}$):
   (a) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{it} b \leq_i \sim_{it} a$;
   (b) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{it} b \leq_t \sim_{it} a$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{it} a \leq_c \sim_{it} b$;
   (d) $\sim_{it} \sim_{it} a = a$.
6. *Ci-инверсия* ($\sim_{ci}$):
   (a) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{ci} b \leq_c \sim_{ci} a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{ci} b \leq_i \sim_{ci} a$;
   (c) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{ci} a \leq_t \sim_{ci} b$;
   (d) $\sim_{ci} \sim_{ci} a = a$.
7. *Tic-инверсия* ($\sim_{tic}$):
   (a) $a \leq_t b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_t \sim_{tic} a$;
   (b) $a \leq_i b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_i \sim_{tic} a$;
   (c) $a \leq_c b \Rightarrow \sim_{tic} b \leq_c \sim_{tic} a$;
   (d) $\sim_{tic} \sim_{tic} a = a$.

Как видно из этого определения, операция инверсии может обращать один частичный порядок, оставляя два других неизменными, либо она обращает одновременно два частичных порядка, не затрагивая третий, либо инверсия одновременно обращает все три частичных порядка данной тройной решетки. В общем случае вовсе не обязательно, что *все* семь типов инверсий должны быть определены на той или иной тройной решетке. Более того, вполне возможны трирешетки вообще *без* инверсий.

Что же касается *SIXTEEN₃*, то здесь каждая из этих операций может быть определена посредством следующей сводной таблицы истинности:

Сводная таблица истинности для инверсий в $SIXTEEN_3$

a	$\sim_t a$	$\sim_i a$	$\sim_c a$	$\sim_{tc} a$	$\sim_{it} a$	$\sim_{ci} a$	$\sim_{tic} a$
N	***N***	***A***	***N***	***N***	***A***	***A***	***A***
T	***F***	***TFt***	***t***	***F***	***TFf***	***Ttf***	***Ftf***
F	***T***	***TFf***	***f***	***T***	***TFt***	***Ftf***	***Ttf***

t	***f***	***Ttf***	***T***	***F***	***Ftf***	***TFt***	***TFf***
f	***t***	***Ftf***	***F***	***T***	***Ttf***	***TFf***	***TFt***
TF	***TF***	***TF***	***tf***	***Tf***	***TF***	***tf***	***tf***
Tt	***Ff***	***Tt***	***Tt***	***Ff***	***Ff***	***Tt***	***Ff***
Tf	***Ft***	***Ft***	***Ft***	***Tf***	***Tf***	***Tf***	***Ft***
Ft	***Tf***	***Tf***	***Tf***	***Ft***	***Ft***	***Ft***	***Tf***
Ff	***Tt***	***Ff***	***Ff***	***Tt***	***Tt***	***Ff***	***Tt***
tf	***tf***	***tf***	***TF***	***TF***	***tf***	***TF***	***TF***
TFt	***TFf***	***T***	***Ttf***	***Ftf***	***F***	***t***	***f***
TFf	***TFt***	***F***	***Ftf***	***Ttf***	***T***	***f***	***t***
Ttf	***Ftf***	***t***	***TFt***	***TFf***	***f***	***T***	***F***
Ftf	***Ttf***	***f***	***TFf***	***TFt***	***t***	***F***	***T***
A	***A***	***N***	***A***	***A***	***N***	***N***	***N***

Из этой таблицы видно, что, например, *t*-инверсия ведет себя в точности как сильное отрицание Нельсона, а *tc*-инверсия – как классическое отрицание де Моргана.

7. Некоторые подрешетки и возможные обобщения. Понятие *n*-мерной мультирешетки

Заметим, что определение 3 явным образом трактует трирешетки как особого рода частично упорядоченные множества. Как известно, понятие *решетки как частично упорядоченного множества* в общем случае эквивалентно понятию *решетки как алгебры*. В этом последнем смысле $SIXTEEN_3$ представляет собой структуру (S, $\wedge$, $\vee$, $\cap$, $\cup$, Δ, ∇). В данном параграфе мы рассмотрим некоторые подструктуры этой общей структуры и таким образом рассмотрим некоторые подрешетки $SIXTEEN_3$.

Прежде всего следует заметить, что $SIXTEEN_3$ содержит в качестве подрешеток все возможные бирешетки типа $FOUR_2$. Интересно обратить внимание, что кроме “стандартных” бирешеток, генерируемых на базисах $<T, F>$, $<T, f>$, $<t, F>$ и $<t, f>$, мы имеем здесь довольно интересную четырехзначную “логику ложности” с базисом $<F, f>$, как и “логику (только) истины” с базисом $<T, t>$. Все эти логики могут представлять значительный интерес с философской точки зрения и заслуживают отдельного серьезного изучения.

Другой примечательной подструктурой $SIXTEEN_3$ является обобщенное истинностно-значное пространство, основывающееся на “кривобоком” базисе, о котором шла речь в конце § 5, $<T, F, f>$, образованном при объединении истинностных значений логики Нельсона и интуиционистской логики. Оказывается, данное пространство также представляет собой трирешетку – $EIGHT_3$, которая представлена на рис. 4. Мы видим здесь все те же три частичных порядка: $\leq_i$, который идет от $\boldsymbol{N}$ к $\boldsymbol{TFf}$, $\leq_t$, направленный от $\boldsymbol{Ff}$ к $\boldsymbol{T}$ и $\leq_c$, с $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{TF}$ в качестве нуля и единицы.

Заметим, что пока что совсем не рассматривались никакие дополнительные условия, которые могли бы регулировать отношения между истинностными значениями, устанавливая определенные зависимости между ними. В результате принятия таких условий некоторые комбинации исходных истинностных значений могут запрещаться. Рассмотрим, например, максимальное истинностно-значное пространство S, удовлетворяющее следующим условиям:

Условие 4. $\forall a \in S\,(\boldsymbol{T} \in a \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \notin a)$;
$\forall a \in S\,(\boldsymbol{F} \in a \Leftrightarrow \boldsymbol{t} \notin a)$.

Эти условия выражают идею “последовательности” (или рациональности). Их интуитивный смысл можно выразить следующим образом. Наши *теории* вполне могут оказаться (синтаксически) противоречивыми и тогда вполне может быть так, что некоторое высказывание одновременно является доказанным и опровергнутым (случай $\boldsymbol{TF}$) в рамках такой теории. Однако в своем “эпистемическом поведении” мы в любом случае должны оставаться последовательными (т.е. рациональными). Если высказывание является доказанным, мы не должны его отвергать. И двойственным образом в случае, если высказывание опровергнуто, мы не должны его принимать (толерировать). В определенных случаях эти условия могут оказаться довольно полезными и даже необходимыми. Как результат, истинностно-значное пространство сужается до девяти обобщенных истинностных значений: $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{TF}$, $\boldsymbol{Tt}$, $\boldsymbol{Ff}$, $\boldsymbol{tf}$. Это может показаться несколько необычным, но алгебраическая структура, которую мы получаем на основе этих значений, является, по существу, би-*с-половиной*-решеткой! Эта структура – $NINE_{2.5}$ – представлена на рис. 5. Диаграммы слева и справа представляют различные проекции этой решетки. Мы имеем здесь полные решетки относительно $\leq_t$ и $\leq_c$, однако информационный порядок не образует решетки. Относительно $\leq_i$ мы имеем лишь *полу*решетку с нулем $\boldsymbol{N}$, но без единицы.

Можно рассмотреть еще одно возможное условие, согласно которому конструктивные значения, будучи сильнее, “поглощают” свои неконструктивные аналоги. Это условие запрещает обобщенные истинностные значения, которые содержат комбинации ***Tt*** и ***Ff***. Результирующее истинностнозначное пространство будет в этом случае представленно еще одним вариантом решетки $NINE_{2.5}$.

В завершение остановимся на некоторых возможных обобщениях мультиоценочного подхода и его применениях в других неклассических логиках. Очевидно, что рассмотренные выше истинностные значения допускают и иную интерпретацию. Например, здесь можно задействовать идею модализированных истинностных значений (см. [20]; [42], ср. также [7, с. 122-124]). ***T*** можно интерпретировать как "необходимо истинно", ***F*** – как "необходимо ложно", ***t*** – как "возможно истино" и ***f*** – как "возможно ложно". Трирешетка, получаемая на основе этих истинностных значений, вместо $\leq_c$ будет иметь частичный порядок $\leq_n$, представляющий возрастание необходимости ее элементов.

Точно так же возможна овремененная интерпретация этих истинностных значений. В этом случае мы будем иметь возможность рассмотреть "временной порядок", определенный на множестве обобщенных истинностных значений временной логики. Ну а использование "овремененных модализированных истинностных значений" (типа "необходимо будет истинно") довольно естественным образом приводит к идее *тетра*решетки, с *четырьмя* частичными порядками (для информативности, истинности, необходимости и времени).

Обобщая эту идею, приходим к понятию *n*-решетки (*n*-мерной *мульти*решетки) как структуры, на которой определены в точности *n* частичных порядков, каждый из которых выражает ту или иную степень наличия определенного свойства у элементов рассматриваемого множества (в данном случае множества обобщенных истинностных значений).

Примечание

В настоящей статье в значительной степени представлены результаты исследований, которые осуществлялись совместно Дж.М.Данном, Татсутоши Такенакой и мной во время моего пребывания в *Индианском университете* (Блумингтон, США) в 1999-2000 гг. См. также нашу статью [47], где многие из этих результатов изложены более полно. Я благодарен программе академических обменов им. Фулбрайта за поддержку моих исследований. Я признателен также Надежде Козаченко, которая прочла статью в рукописи и высказала ряд полезных замечаний.

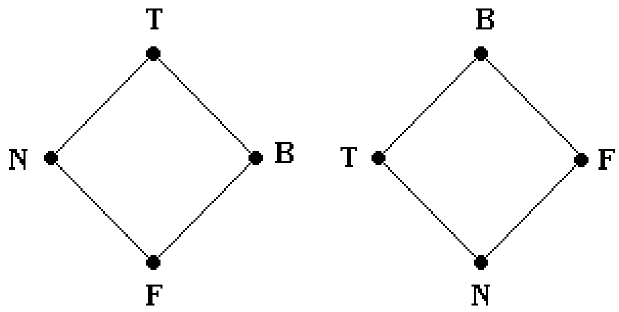
ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
2. *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. М.: Изд. МГУ, 1983. С. 69-76.
3. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Изд. МГУ, 1988.
4. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.
5. *Заславский И.Д.* Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1979.
6. *Карпенко А.С.* Истинностные значения. Что это такое? // Исследования по неклассическим логикам. М.: Наука, 1989. С. 38-53
7. *Карпенко А.С.* Многозначные логики. М.: Наука, 1997.
8. *Орлов И.Е.* Исчисление совместности предложений // Математический сборник. Т. 35. 1928. С. 263-286.
9. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. М.: Изд. МГУ, 1986.
10. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.
11. *Шрамко Я.В.* К проблеме релевантного следования для интуиционистской логики // Логико-философские исследования. Вып. 1. М.: Философское общество СССР, 1989. С. 165-174.
12. *Шрамко Я.В.* Логическое следование и интуиционизм. Киев: ВИПОЛ, 1997.
13. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal Logical Studies. No. 5; 2000. (http://www.logic.ru)
14. *Шрамко Я.В.* Онтологическая модель истинностных значений // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в науці, економіці та освіті. Кривий Ріг. С. 287-297.
15. *Almukdad A.* and *Nelson D.* Constructive falsity and inexact predicates // Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. P. 231-233.
16. *Arieli O.* and *Avron A.* Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25-63.
17. *Asenjo F.* A calculus of antinomies // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1966. Vol. VII. P. 103-105.
18. *Belnap N.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co., 1977. P. 8-37 (рус. пер. *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогрес, 1981).
19. *Belnap N.* How a computer should think // G. Ryle (ed.). Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55 (рус. пер. *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов, М.: Прогресс, 1981).

20. *Caton C.E.* A stipulation of a modal propositional calculus in terms of modalized truth-values // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1963. Vol. 4. P. 55-56.
21. *Costa N.C.A. da*. Calculus propositionnels pour les systemes formels inconsistants // Compes Rendus Acad. Sci. 1963. Vol. 257. P. 3790-3792.
22. *Dunn J.M.* The Algebra of Intensional Logics. Doctoral Dissertation. University of Pittsburgh, Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).
23. *Dunn J.M.* An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // Journal of Symbolic Logic. 1971. P. Vol. 36. 362-363.
24. *Dunn J.M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and ‘coupled trees’ // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
25. *Dunn J.M.* Relevance logic and entailment // D. M. Gabbay and F. Guenter (eds). Handbook of Philosophical Logic. Vol III. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. P. 117-224.
26. *Dunn J M.* A Comparative study of various model-theoretic treatments of negation: a history of formal negation // D. M. Gabbay and H. Wansing (eds.). What is Negation? Applied Logic Series. Vol. 13. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 23–51.
27. *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 225-256.
28. *Fitting M.* Logic programming on a topological bilattice // Fundamenta Informatica. 1988. Vol. 11. P. 209-218.
29. *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225-256.
30. *Fitting M.* Kleene's logic, generalized // Journal of Logic and Computation. 1990. Vol. 1. P. 797-810.
31. *Frege G.* Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.
32. *Frege G.* Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Felix Meiner, Hamburg, 1990.
33. *Ginsberg M.* Multivalued logics // Proceedings of AAAI-86. Fifth National Conference on Artificial Intellegence. Los Altos: Morgan Kaufman Publishers, 1986. P. 243-247.
34. *Ginsberg M.* Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in AI // Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256-316.
35. *Heyting A.* Intuitionism: An Introduction. Amsterdam, 1956 (рус. пер. *А. Гейтинг*. Интуиционизм, М.: Мир, 1965).
36. *Jaskowski S.* Three contributions to the two-valued propositional calculus // Studia Logica. 1975. Vol. 34. P. 121-132.
37. *Lukasiewicz J.* Über den Satz von Widerspruch bei Aristoteles // Bulletin international de Academie des Sciences de Cracovie, Classe de Philosophie (1910). P. 15-38.
38. *Lukasiewicz J.* On three-valued logic // Selected Works. Oxford, 1970. P. 87-88.
39. *Nelson D.* Constructible falsity // Journal of Symbolic Logic. 1949. Vol. 14. P. 16-26.

40. *Priest G*. The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219-241.
41. *Pynko A.P.* Regular bilattices // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2000. Vol. 10. P. 61-105.
42. *Resher N*. On intuitive interpretation of systems of four-valued logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 6. P. 154-156.
43. *Scott D*. Models for various type-free calculi // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 157-187.
44. *Shramko Y*. Intuitionismus und Relevanz. Berlin: Logos-Verlag, 1999.
45. *Shramko Y*. State-descriptions as a method of semantic analysis for intuitionistic logic // J. Nida-Rümelin (ed.) Rationality, Realism, Revision. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1999 P. 110-118.
46. *Shramko Y*. American plan for intuitionistic logic 1: an intuitive background // The Logica Yearbook 1999. Ed. Timothy Childers. Prague: Filosophia, 2000.
47. *Shramko Y*., *Dunn J.M*., *Takenaka T*. The trilattice of constructive truth values // Journal of Logic and Computation. Vol. 11, 2001. P. 761-788.
48. *Voishvillo E.K*. A theory of logical relevance // Logique et Analyse. № 155-156, 1996. P. 207-228.

Приложение



a ***b***

Рис. 1.

a – логическая решетка **L4**

b – аппроксимационная решетка **A4**

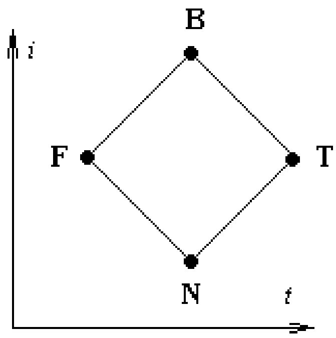


Рис. 2. Бирешетка $FOUR_2$

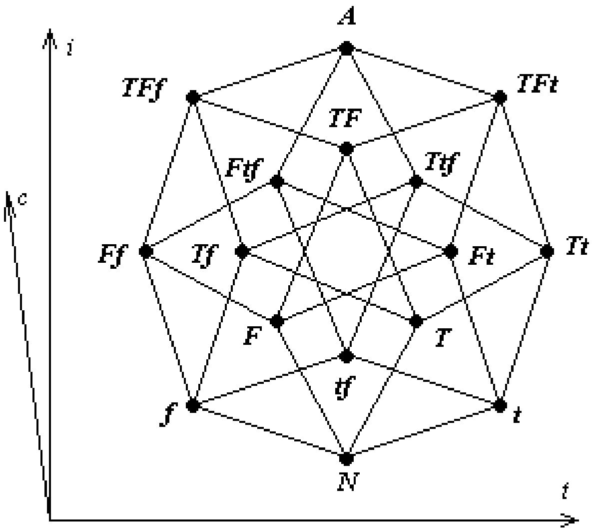


Рис. 3. Трирешетка *SIXTEEN*$_3$

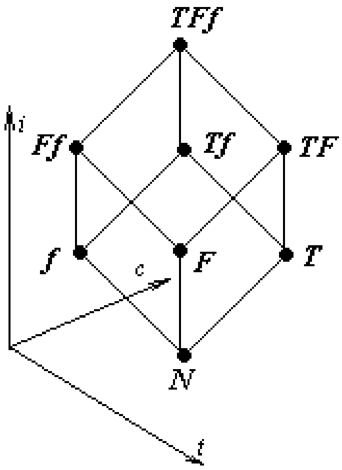
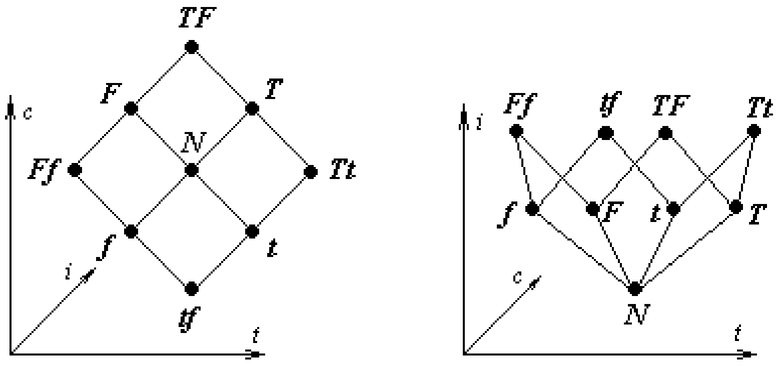


Рис. 4. Трирешетка *EIGHT*$_3$



a ***b***

Рис. 5. Би-с-половиной-решетка $NINE_{2.5}$