Ошибка Георга Кантора?

Я. ШРАМКО

Во втором номере журнала "Вопросы философии" за 2000 г. опубликована заметка А.А. Зенкина, в которой утверждается, что осуществленное Г. Кантором доказательство несчетности множества действительных чисел ошибочно. Иными словами, знаменитая теорема Кантора "просто неверна", а ее доказательство, "в действительности", если вообще что-то и доказывает, то нечто прямо противоположное тому, что утверждает Г. Кантор.

Прежде всего настораживает то обстоятельство, что автор заметки, критикуя Кантора, не считает нужным обратиться непосредственно к первоисточнику. По крайней мере, в тексте заметки нет ссылок на статьи Г. Кантора [3, 4], в которых доказывается вышеупомянутая теорема. Вместо этого читателю предлагается список литературы, состоящий из семи работ … самого А.А. Зенкина. Стоит ли после этого удивляться, что автор заметки неверно воспроизводит основную идею разбираемого им доказательства?

А.А. Зенкин утверждает, что он излагает доказательство Кантора по русскому переводу книги С.К. Клини "Введение в метаматематику" (а не "математику", как в заметке) [7] и при этом называет свое изложение "традиционным". Это, однако, не соответствует фактическому положению дел. Ведь А.А. Зенкин начинает изложение с того, что предлагает нам рассмотреть некоторый (фиксированный) пересчет *всех* действительных чисел. Клини же [7. С. 6], вслед за Кантором [4. С. 278], рассматривает произвольный пересчет каких-либо (но необязательно всех) действительных чисел, принадлежащих интервалу (0,1).

В самом деле, Г. Кантор формулирует свою теорему следующим образом: "Если $E_1, E_2, \ldots, E_v, \ldots$есть какая-либо просто бесконечная последовательность элементов множества M, то всегда существует некоторый элемент E_0 из M, который отличен от любого E_v"[1] (M – множество всех действительных чисел) [4. С. 278]. См. также аналогичную формулировку в [3. С. 117]. Итак, Г. Кантор говорит просто о какой-либо "последовательности элементов множества M", но вовсе не утверждает, что такая последовательность должна включать в себя все элементы данного множества. В свою очередь Клини так уточняет данную формулировку Кантора: "Предположим, что $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ есть бесконечный список или пересчет некоторых, но не обязательно

[1] На языке оригинала: "Ist E_1, E_2, …, E_v, … irgendeine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit, so gibt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_v ubereinstimmt".

всех действительных чисел, принадлежащих интервалу"[2] (имеется в виду интервал (0,1)) [7. С. 6].

Допущенная автором заметки неточность вовсе не второстепенна, как это может представиться на первый взгляд, а, напротив, весьма показательна. Дело в том, что А.А. Зенкин (по крайней мере, в разбираемой заметке) почему-то считает, что центральное место в доказательстве Кантора занимает рассуждение "от противного", и именно эта форма рассуждения является главным объектом его критики.

Между тем это не совсем так, вернее, совсем не так. Кантор доказывает, что для любого пересчета (произвольного) множества действительных чисел может быть построено некоторое новое действительное число такое, что оно не принадлежит данному пересчету. При этом формулируется эффективная процедура построения такого числа – *диагональный метод Кантора*, которая и является "центром тяжести" доказательства (заметим, кстати, что А.А. Зенкин даже не описывает саму эту процедуру и не рассматривает ее по существу). Затем в соответствии с хорошо известным принципом классической логики

$$\forall x \exists y \neg A \rightarrow \neg \exists x \forall y A,$$

и делается вывод о том, что не существует пересчета множества действительных чисел, такого что все действительные числа принадлежали бы этому пересчету. Как видим, данное доказательство не имеет формы "рассуждения от противного"[3].

Таким образом, критика А.А. Зенкиным Г. Кантора не достигает своей цели, поскольку она относится не к доказательству Кантора по существу, а к некоторому варианту этого доказательства, придуманному самим автором заметки, к тому же такому варианту, который не является необходимым для достижения основного результата, о котором идет речь. В данном контексте если и уместно говорить о какой-либо ошибке, то вовсе не об ошибке Кантора, а об ошибке А.А. Зенкина.

Рассмотрим, однако, ту версию доказательства теоремы Кантора, которая излагается в заметке. Итак, А.А. Зенкин формулирует гипотезу (допущение) о существовании некоторого пересчета *всех* действительных чисел. Далее, он вполне справедливо замечает, что допущение существования такого пересчета приводит к противоречию. Казалось бы, здесь как раз логично сделать вывод о невозможности существования такого пересчета. Но не тут-то было! Вместо этого автор неожиданно предлагает "расширить" этот гипотетический (!) пересчет, то есть пополнить его за счет вновь появляющегося действительного числа. Позвольте, но ведь, во-первых, это число, по определению, уже должно бы принадлежать данному пересчету, а, во-вторых, самого этого пересчета просто-напросто не существует (поскольку допущение его существования ведет к противоречию)! Так что расширять, в сущности, просто нечего. Однако А.А. Зенкина это ничуть не смущает. Он продолжает оперировать гипотетическими сущностями, как если бы они были вполне реальными, не замечая при этом, что все его рассуждение продолжает зависеть от неисключенного допущения о существовании указанного пересчета всех действительных чисел. Таким

---

[2] В оригинале: "suppose that x_0, x_1, x_2, x_3, ... is an infinite list or enumeration of some but not necessary all of the real numbers belonging to the interval".

[3] Здесь необходимо сделать два уточнения. Во-первых, можно, конечно, обратить внимание на то, что для доказательства самого вышеупомянутого принципа логики, например, в рамках классического исчисления предикатов, используется правило "введения отрицания", являющееся разновидностью схемы *Reductio ad Absurdum*. Это, однако, означает, что данная схема если и задействуется, то лишь на чисто логическом уровне и не играет существенной роли в осуществляемом математическом построении. Не говоря уже о том, что всегда имеется возможность просто принять вышеупомянутый принцип в качестве логической аксиомы. Во-вторых, всегда можно перестроить имеющееся прямое доказательство так, чтобы придать ему форму доказательства от противного, или же получить на основе данного доказательства некоторое противоречие, допустив нечто противоположное тому, что установлено посредством доказательства. Так, например, Г. Кантор отмечает, что допущение существования пересчета всех действительных чисел привело бы к признанию того, что некоторый объект одновременно является и не является действительным числом [4. С. 279]. Однако это совсем не то противоречие, о котором говорит А.А. Зенкин.

образом, данное рассуждение А.А. Зенкина нарушает важное требование, которому должен удовлетворять любой логический вывод, чтобы быть корректным: все принимаемые (дополнительные) допущения должны быть из вывода исключены (см., например, [1. С. 125]).

Иными словами, имеем следующую картину. Автор заметки постулирует существование некоторого объекта, получает в результате противоречивую теорию, а затем утверждает, что в рамках данной придуманной им противоречивой теории теорема Кантора является ошибочной. Что ж, таким способом можно "опровергнуть" любую теорему, даже не прибегая к разбору ее доказательства по существу. Уместно только напомнить, что теорема Кантора как раз и доказывает невозможность существования того самого объекта, существование которого А.А. Зенкин пытается постулировать.

Оставим на совести автора его утверждение о принадлежности Кронекера и Брауэра к "современной классической математике", о том, что все действительные числа умещаются на отрезке (0,1) (очевидно, автор не относит число π к множеству действительных чисел), что "Г. Кантор доказал свою теорему в 80-х годах прошлого столетия" (доказательство было впервые изложено в письме Кантора к Дедекинду в 1873 г. и опубликовано годом позже), и что доказательство теоремы "занимает всего ... 10 строчек" (статья Кантора занимает около трех страниц, из которых не менее половины посвящено непосредственно доказательству); а также такие выражения как "счетно-бесконечный пересчет" (по-видимому, автор полагает, что может быть "несчетный пересчет") и туманные замечания о "снятии противоречия". Заметим лишь, что эти (и многие другие такого рода) утверждения автора вполне соответствуют тому уровню логической компетентности, который демонстрирует разбираемая заметка.

Любопытно отметить, что один из ведущих современных логических журналов "Bulletin of Symbolic Logic" не так давно опубликовал статью английского логика и математика Вилфрида Ходжеса под названием "Редактор вспоминает некоторые безнадежные статьи", посвященную тем "двум дюжинам странных людей" [6], которые всевозможными способами опровергают доказательство Кантора и рассылают свои статьи на эту тему в различные журналы. В этой поучительной статье не только приводится точное и доступное доказательство теоремы Кантора, но также осуществляется подробный разбор и классификация всевозможных ее "опровержений". Так что А.А. Зенкин не первый и, по-видимому, не последний, кто пытается обнаружить ошибку в знаменитом доказательстве Георга Кантора (см., например, [5]). Редактор другого логико-философского журнала "Journal of Philosophical Logic" как-то сказал в частной беседе, что ему приходится по крайней мере дважды в год иметь дело со статьями подобного рода. В этой связи публикация заметки А.А. Зенкина в таком солидном журнале, как "Вопросы философии", пусть даже и в разделе "Из редакционной почты", не может не вызывать некоторого удивления.

Свое сообщение мне хотелось бы завершить словами, которыми заканчивается вышеупомянутая статья В. Ходжеса: "в доказательстве Кантора нет никакой ошибки".

Примечания

[1] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. М., 1994.

[2] *Зенкин А.А.* Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии, № 2, 2000.

[3] *Cantor G.* Über eine Eigenschaft des inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen // *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen mathematischen and philosophischen Inhalts. Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962. S. 115–118.

[4] *Cantor G.* Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre // *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen mathematischen and philosophischen Inhalts. Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962. S. 278–281.

[5] *Gumanski L.* Remarks on Cantor's diagonal method and some related topics // Untersuchungen zur Logik und zur Methodologie (3), Leipzig, 1986. S. 15–23.

[6] *Hodges W.* An editor recalls some hopeless papers // The Bulletin of Symbolic Logic. V. 4, 1998.

[7] *Kleene S.C.* Introduction to Metamathematics. Amsterdam, 1952.