Логическая семантика: перспективы для философии языка и эпистемологии

Сборник научных статей,
посвященных юбилею
Е.Д. Смирновой

Москва
«Креативная экономика»
2011

УДК 510,27
ББК 87,4
Л69

Л69 **Логическая семантика: перспективы для философии языка и эпистемологии:** Сборник научных статей, посвященных юбилею Е.Д. Смирновой / Отв. ред. Е.Г.Драгалина-Черная и Д.В.Зайцев. – Москва: Креативная экономика, 2011. – 328 с.: ил.

ISBN 978-5-91292-063-9

УДК 510,27
ББК 87,4

ISBN 978-5-91292-063-9

СОДЕРЖАНИЕ

11. *Barwise J., Perry J.* Semantic Innocence and Uncompromising Situations // Midwest Studies in the Philosophy of Language. Vol. VI (1981). – P. 387–403.

12. *Barwise J., Perry J.* Situations and Attitudes. – Cambridge Mass., 1983.

13. *Carnap R.* Der logische Aufbau der Welt. – Berlin, 1928.

14. *Carnap R.* Introduction to Semantics (Studies in Semantics, Vol. 1). – Cambridge Mass., 1942.

15. *Carnap R.* Modalities and Quantification // Journal of Symbolic Logic. Vol. 11 (1946). – P. 33–64.

16. *Church A.* Carnap's Introduction to semantics // The Philosophical Review. – Vol. 52 (1943). – P. 298–304.

17. *Church A.* A Formulation of the Logic of Sense and Denotation // Structure, Method and Meaning: Essays in Honor of H. M. Sheffer. – New York, 1951. – P. 3–24.

18. *Church A.* The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis // Contributions to the Analysis and Synthesis of Knowledge / Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. – 1951. – Vol. 80. – P. 100–112.

19. *Church A.* Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part I) // NOUS. 1973. Vol. 7. P. 24–33.

20. *Church A.* Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part II) // NOUS. 1974. Vol. 8. – P. 135–156.

21. *Church A.* A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation: Alternative I // NOUS. 1993. Vol. 27. – P. 141–157.

22. *Gödel K.* Russell's Mathematical Logic // Kurt Gödel. Collected Works: Publication 1938–1974. Vol. 2. Eds. S. Feferman, J. Dawson. – Oxford, 1990. – P. 119–141.

23. *Karnap R.* Logishe Syntax der Sprache. – Leipzig, 1934.

24. *Neale S., Dewer J.* Slingshots and Boomerangs // Mind. Vol. 106. – P. 143–168.

25. *Neale S.* The Philsophical Significance of Gödel's Slingshot // Mind. Vol. 104 (1995). – P. 761–825.

26. *Neale S.* Facing Facts. – Oxford, 2001.

27. *Oppy G.* The Philsophical Insignificance of Gödel's Slingshot // Mind. Vol. 106 (1997). – P. 121–141.

28. *Oppy G.* Facing Facts? // Australian Journal of Philosophy. Vol. 84. – P. 621–643.

29. *Perry J.* Evading the Slingshot // Philosophy and Cognitive Science. Ed. by A. Clark et al. The Netherlands, 1996. – P. 95–114.

30. *Quine W. V.* Three Grades of Modal Involvement // Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy. Brussels, 1953. Vol. 14. См. также: Ways of Paradox. Cambridge, 1976. (Revised ed.). – P. 156–174.

31. *Shramko Y., Wansing H.* The Slingshot Argument and Sentential Identity // Studia Logica. Vol. 91(2009). – P. 429-455.

32. *Sobel J. H.* Collapsing Arguments // Australian Journal of Logic. Vol. 6(2008). – P. 122–161.

Я.В. Шрамко

Каково подлинное понятие ложности в интуиционистской логике?

We highlight the importance of the notion of falsity for a semantical consideration of intuitionistic logic. One can find in the literature two principal versions of such a notion, namely, falsity as non-truth and falsity as truth of a negative proposition. We argue in favor of the first version as the genuine intuitionistic notion of falsity.

Ключевые слова: интуиционистская логика, истинностное значение, конструктивная истина, конструктивная ложь, модели Крипке.

„What is it to be false? Shall we call a sentence false if and only if it has a true negation? Or if and only if it isn't true?"
(Дэвид Льюис, «Логика для уклонистов»)

1. Предварительные замечания

С тех пор как Готлоб Фреге выдвинул и обосновал свое понимание предмета логики как науки «о наиболее общих законах бытия истины» [3, с. 307], именно понятие истины считается центральным понятием логической семантики. Как отмечает в этой связи Е.Д. Смирнова, «понятие истинности является основным понятием логической семантики, необходимым для обоснования принимаемых логических процедур» [2, с. 23]. Это находит свое выражение, в частности, в том, что другие важные логические понятия, такие как логического закона и логического следования традиционно определяются через истину, которая истолковывается как особого рода объект, выступающий значением высказываний – их истинностным (логическим) значением. Иными словами, в логической семантике, развиваемой в соответствии с идеями Фреге, понятие истины репрезентируется посредством соответствующего истинностного значения. Истина, однако, не может полностью исчерпывать собой универсум логических значений, поскольку в этом случае все высказывания языка будут иметь одно и то же значение (истина), а логика, опирающаяся на единственное истинностное значение – своего рода «однозначная логика» – с необходимостью окажется абсолютно противоречивой.

Таким образом, любая нетривиальная логика должна быть, как минимум, двузначной, а значит, наряду с истиной обязательно должна опираться хотя бы еще на одно – отличное от истины – логическое значение. Парадигмальной в этом смысле представляется стандартная семантика классической логики, где в качестве другого истинностного значения принимается «ложь», определяемая просто как *отсутствие* истины, то есть, как «*не*-истина»: высказывание A является (классически) ложным если и только если оно не является (классически) истинным. При таком понимании ложность выполняет важную ограничительную функцию, и является необходимым компонентом семантических построений, несмотря на то, что при определении основных логических понятий – логического закона и логического следования – вполне можно обойтись и без ее явного употребления. Более того, дополнительный характер классической ложности по отношению к классической истине позволяет сформулировать полностью адекватную семантику для классической логики в терминах одной лишь ложности (путем задания условий ложности логических связок и определения основных логических понятий через ложь). Для истины остается в таком случае роль ограничителя ложности.

Однако в неклассических логиках ситуация может быть значительно менее прозрачной, а проблема экспликации в той или иной логической системе понятия ложности и прояснения его отношений с используемым в данной системе понятием истины может быть не такой простой. Так, не вполне ясно, какое понятие ложности следует использовать в интуиционистской логике, являющейся одной из старейших среди неклассических логик. В литературе, посвященной интуиционизму, понятие ложности если и рассматривается, то лишь в самых общих чертах, при этом отсутствует общепринятая единообразная трактовка данного понятия. В настоящей статье мы попытаемся сравнить два возможных подхода к определению лжи в интуиционизме и привести аргументы в пользу одного из них, в рамках которого, на наш взгляд, удается обосновать аутентичное для интуиционистской логики понятие ложности.

2. Два способа определения ложности в интуиционистской логике

Как известно, интуиционистская логика принадлежит к семейству *конструктивных* логик. На семантическом уровне это означает, что в ней принимается конструктивная концепция истины. Высказывание считается конструктивно истинным, если и только если оно является (конструктивно) доказанным[1]. Именно с учетом такого понимания формулируется стандартная семантика Крипке для интуиционистской логики высказываний.

Модель Крипке для интуиционистской логики определяется как тройка: $\langle W, \leq, \Vdash_T\rangle$, где W – множество «возможных миров», интуитивно понимаемых как множество состояний некоторой интуиционистской теории, $\leq$ – рефлексивное и транзитивное отношение между состояниями теории, интуитивно понимаемое как возможное отношение во времени «раньше или одновременно», и $\Vdash_T$ – отношение «конструктивного вынуждения» между состояниями теории и высказываниями языка (для $a \in W$, $a \Vdash_T A$ читается как «состояние теории a вынуждает конструктивную

[1] Понятие конструктивного доказательства может быть при этом введено чисто синтаксическим путем, т.е., независимо от понятия истины.

истинность высказывания A»). Для атомарных высказываний отношение $\|\!-_{\mathrm{T}}$ задается моделью так, чтобы для всякого $a, b \in W$ и для всякого элементарного высказывания p_i, выполнялось следующее условие «сохранности»:

(1) Если $a \|\!-_{\mathrm{T}} p_i$ и $a \leq b$, то $b \|\!-_{\mathrm{T}} p_i$.

Для сложных высказываний отношение $\|\!-_{\mathrm{T}}$ задается посредством следующих определений:

(2) $a \|\!-_{\mathrm{T}} A \wedge B \Leftrightarrow a \|\!-_{\mathrm{T}} A$ и $a \|\!-_{\mathrm{T}} B$;

(3) $a \|\!-_{\mathrm{T}} A \vee B \Leftrightarrow a \|\!-_{\mathrm{T}} A$ или $a \|\!-_{\mathrm{T}} B$;

(4) $a \|\!-_{\mathrm{T}} \sim A \Leftrightarrow \forall b\ (a \leq b \Rightarrow b \|\!+_{\mathrm{T}} A)$;

(5) $a \|\!-_{\mathrm{T}} A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall b\ (a \leq b \Rightarrow (b \|\!+_{\mathrm{T}} A$ или $b \|\!-_{\mathrm{T}} B))$.

Индукцией по построению высказываний, несложно распространить условие сохранности на все высказывания языка.

Обычным образом формулируются понятия общезначимого высказывания ($\models A$) и отношения логического следования между двумя высказываниями ($A \models B$):

(6) $\models A \Leftrightarrow \forall W\ \forall a \in W\ (a \|\!-_{\mathrm{T}} A)$.

(7) $A \models B \Leftrightarrow \forall W\ \forall a \in W\ (a \|\!-_{\mathrm{T}} A \Rightarrow a \|\!-_{\mathrm{T}} B)$.

При таком построении, отношение конструктивного вынуждения по существу представляет интуиционистское понятие истины. Интуитивно выражение «$a \|\!-_{\mathrm{T}} A$» можно также истолковать как «высказывание A является *конструктивно доказанным* в состоянии теории a». В соответствии с этим истолкованием, определение (4) говорит нам, что высказывание $\sim A$ является доказанным, если и только если в любом последующем состоянии нашей теории высказывание A не является доказанным, иными словами, A никогда не будет доказанным. Последнее фактически означает *невозможность доказательства A*, и если такая невозможность действительно продемонстрирована, то высказывание A можно считать *интуиционистски опровергнутым*.

Важным свойством, выражающим на семантическом уровне конструктивный характер интуиционистской истины, является условие сохранности для доказанных высказываний. В соответствии с этим условием, высказывание, будучи однажды доказанным, остается таким навсегда (во всех последующих состояниях теории), что вполне естественно, если речь идет о конструктивных математических доказательствах.

Интересно отметить, что в сформулированной таким образом семантической модели нигде в явном виде не используется понятие ложности. Тем не менее, истина имеет здесь неуниверсальный характер, и вполне возможны случаи, когда то или иное состояние теории не вынуждает какое-то высказывание, что зафиксировано, в частности, в определениях для отрицания (4) и импликации (5). А значит, ложь должна присутствовать (пусть и неявно) в этой – свободной от истины – области, и вполне закономерно возникает вопрос о возможной экспликации этого понятия и выявлении его характерных свойств.

Вообще говоря, имеется два основных способа введения в семантическую теорию понятия ложности. В одном случае, который уже был упомянут выше, ложь интерпретируется как дополнительное, по отношению к истине, понятие: «A ложно» означает не что иное, как «A не истинно». Существует, однако, и другой взгляд, согласно которому ложь следует истолковывать в качестве непосредственного представителя на семантическом уровне синтаксического понятия отрицания, то есть, «A ложно» является сокращением для выражения «$\sim A$ истинно». Главное различие между указанными подходами заключается в том, что в первом случае ложность определяется исключительно в семантических терминах (терминах метаязыка) и таким образом представляет собой чисто семантическое понятие. Во втором случае при определении ложности используются термины объектного языка, в частности, оператор отрицания, а при таком рассмотрении ложность приобретает смешанный семантико-синтаксический характер.

В классической логике оба подхода оказываются эквивалентными в том смысле, что, в конечном счете, приводят к одному и тому же понятию ложности, в силу классического определения условий истинности для отрицания: «$\sim A$ истинно, если и только если A не истинно». Однако в неклассических логиках такая эквивалентность не имеет места, в частности, отсутствует она и в интуиционистской логике.

В литературе по интуиционистской логике можно встретить оба подхода к истолкованию лжи. Так, Крипке, формулируя семантическую модель для интуиционистской логики [см. 10, с. 94], эксплицитно рассматривает в качестве множества истинностных значений двухэлементное множество $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ и вводит истинностно-значную функцию $\varphi(A, a)$, которая для каждого высказывания A и для каждого возможного мира a принимает одно из двух истинностных значений. Более того, Крипке задает условия истинности для сложных высказываний следующим образом: $\varphi(A \wedge B, a) = \mathbf{T}$ если и только если $\varphi(A, a) = \mathbf{T}$ и $\varphi(B, a) = \mathbf{T}$; *в противном случае*, $\varphi(A \wedge B, a) = \mathbf{F}$, и аналогично для остальных логических связок. По существу, это означает, что в оригинальном семантическом построении Крипке ложь понимается как простое отсутствие (конструктивной) истины.

Обозначим такое чисто семантическое понятие ложности в интуиционистской логике посредством особого отношения вынуждения $\|-_{\mathrm{f}}$ и примем для него следующее определение:

(8) $a \|-_{\mathrm{f}} A \Leftrightarrow a \|+_{\mathrm{T}} A$.

Выражение «$a \|-_{\mathrm{f}} A$» интуитивно истолковывается как «высказывание A не является доказанным в состоянии теории a», т.е. семантическое понятие ложности в интуиционистской логике репрезентирует простое отсутствие доказательства в определенный момент развития нашей теории. Ясно, что такое понятие ложности не является конструктивным, поскольку оно фиксирует простой факт отсутствия доказательства, но не говорит ничего об осуществлении какого-либо конструктивного построения (доказательства). Поэтому для этого понятия не должно (в общем случае) выполняться условие сохранности – высказывание может быть не доказанным в данный момент, но соответствующее доказательство вполне может быть найдено позже. В то же время, для такого понятия естественным образом выполняется условие «обратной сохранности»: если высказывание не доказано в некотором состоянии теории, то это означает, что оно также не было доказано во всех предшествующих состояниях.

Если считать, что противоположным понятию доказательства является понятие опровержения, то отношение $\|-_{\mathrm{f}}$, конечно же, нельзя рассматривать в качестве полноправного (прямого) представителя этого последнего понятия. Тот факт, что у нас отсутствует доказательство того или иного высказывания, вовсе не обязательно означает, что данное высказывание является (актуально) опровергнутым. Это свидетельствует лишь о том, что на определенной стадии развития нашей теории указанное высказывание

рассматривается как такое, что *может быть* (потенциально) опровергнуто, поскольку для него на данный момент не существует никакого доказательства. А значит, выражение «$a \|-_{\mathrm{f}} A$» можно, самое большее, истолковать также и в смысле «высказывание A является (потенциально) *опровержимым* в состоянии теории a».

Несложно видеть, что введенное посредством (8) понятие ложности не является прямым коррелятом интуиционистского отрицания (4). В то же время, в работах представителей интуиционизма, в том числе Брауэра и Гейтинга, нередко можно встретить синонимичное использование выражений «А ложно» и «~A истинно». Например, Брауэр обычно говорит об отрицании того или иного высказывания как о его «абсурдности», иногда отождествляя последнюю с «ложностью» [см., напр., 5., с. 114]. В знаменитой работе Гейтинга «Интуиционизм» читаем: «В математических утверждениях не может возникнуть неопределенность; ‘не’ всегда имеет точный смысл. ‘Суждение p не является истинным’ или ‘суждение p является ложным’ означает ‘предполагая истинность p, мы придем к противоречию’» [1., с. 28]. В данном случае отрицание в выражении «*p не является истинным*» очевидно истолковывается как отрицание объектного языка («математическое отрицание»).

Аналогичным образом, Даммет замечает, что «при … интерпретации ‘А истинно’ … в смысле ‘А доказано’, утверждение *‘А ложно’, то есть ‘не-А истинно’*, является гораздо более строгим, чем ‘А не истинно’» [6, С. 19, курсив наш – Я.Ш.].

Назовем такое понимание интуиционистской ложности «сильным» и обозначим его посредством особого отношения вынуждения «$\|-_{\mathrm{F}}$». Имеем следующее определение:

(9) $a \|-_{\mathrm{F}} A \Leftrightarrow a \|-_{\mathrm{T}} {\sim}A$.

Еще раз обратим внимание на то, что сильное понятие ложности, в отличие от того, которое вводится определением (8), имеет смешанный синтаксическо-семантический характер. И, опять-таки, в отличие от классической логики, поскольку в интуиционистской семантике в общем случае *не* выполняется равносильность $a \|-_{\mathrm{T}} {\sim}A \Leftrightarrow a \|+_{\mathrm{T}} A$, отношения $a \|-_{\mathrm{f}} A$ и $a \|-_{\mathrm{F}} A$ не совпадают.

В этой связи возникает ряд интересных вопросов. Во-первых, означает ли все вышеизложенное, что в интуиционистской логике одновременно существует два различных понятия ложности и насколько обоснованным будет допущение такого сосуществования? Во-вторых, какую роль может (или должно) играть понятие ложности в логической семантике вообще и в интуиционистской логике, в частности? В третьих, если сосуществование различных понятий ложности в интуиционистской логике следует все же признать нецелесообразным, то какое из рассмотренных понятий является, так сказать, «подлинным» или «аутентичным», то есть, таким, которое должно быть принято в качестве «официального» интуиционистского понятия ложности?

3. Ложность в интуиционистской логике: сколько и зачем?

Прежде всего, рассмотрим вопрос, в каком смысле можно говорить о двух различных понятиях ложности в рамках одной логики? Для примера возьмем семантическое построение многозначных логик, где обычно фиксируется множество *выделенных* истинностных значений, интерпретируемое как аналог классического понятия истины. В общем случае множество выделенных значений может содержать более одного элемента, что может быть истолковано как способ различения высказываний *по степени* истинности. В этом отношении, можно утверждать, что множество выделенных значений в целом представляет (единое) понятие истины в широком смысле, принимаемое в данной логике, причем эта истина имеет *градуальный* характер. Вместе с тем, каждое выделенное значение само по себе вполне способно выразить некоторое частное понятие истины (понятие истины в узком смысле).

Аналогичным образом, в многозначных логиках наряду с множеством выделенных значений иногда рассматривают множество *анти-выделенных* значений [см, напр. 17], призванное олицетворять понятие лжи. Опять-таки, если это множество содержит более одного элемента, то в целом оно выражает широко истолкованное понятие ложности для данной логики, а отдельные анти-выделенные значения могут репрезентировать различные виды ложности, допустимые в этой логике.

Если теперь обратиться к интуиционистской логике, то следует признать, что здесь подобное умножение различных «оттенков ложности» представляется либо невозможным, либо необоснованным. Прежде всего, возникает вопрос, следует ли считать интуиционистскую логику разновидностью двузначной логики, или же она относится к «многозначной логической парадигме»? Вообще говоря, технически осуществимы оба подхода. В первом случае семантика для интуиционистской логики строится с использованием реляционных моделей по типу описанного выше Крипкевского построения [ср. также 8]. Ясно, что при таком подходе в интуиционистской семантике может существовать только *одно* истинностное значение, репрезентирующее «ложь». Во втором случае, семантика для интуиционистской логики основывается на логических матрицах [см., напр., 9], и согласно хорошо известному результату Геделя [7], такого рода матрицы необходимо будут бесконечнозначными. Выделение же среди бесконечного числа интуиционистских истинностных значений какой-то конечной совокупности, призванных репрезентировать ту или иную степень ложности, представляется довольно искусственным и вряд ли согласуется с пониманием интуиционистской ложности как опровержимости (и тем более, опровергнутости) высказываний[1].

В целом, мы придерживаемся «двузначного подхода» к интуиционистской логике и отвергаем возможность сосуществования в ней двух различных понятий ложности. А значит, если возникает необходимость эксплицитно использовать ложность в семантических построениях, мы должны решить, какое из расмотреных в предыдущем параграфе понятий следует принять в качестве такого, которое адекватно выражает идею интуиционистской ложности.

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно уточнить, в каких вообще случаях, при построении семантики той или иной логики, нам может понадобиться «ложь» в качестве *отдельного и полноправного* истинностного значения. На наш взгляд, можно вы-

[1] Следует также учитывать, что при истолковании истинности как конструктивной доказанности в интуиционистской логике также может приниматься лишь одно понятие истины, в силу самой природы математического доказательства, которое, подобно булгаковской осетрине, не может быть «второй свежести», доказательство либо есть, либо его нет – третьего здесь не дано.

делить два таких случая. Во-первых, как уже отмечалось ранее, ложь можно задействовать в целях «дуализации» обычной «истинностной» семантики, и переформулировки ее таким образом, чтобы в качестве исходного (и основного) семантического понятия выступала ложность. Во-вторых, ложь необходима в тех случаях, когда оказывается невозможным построить адекватную семантику в терминах одной лишь истины и оба эти истинностные значения выступают в качестве равноправных компонентов общей семантической конструкции[1].

Далее, в контексте построения семантики для интуиционистской логики, мы рассмотрим оба эти случая и покажем, что отношение $||-_f$ допускает их полноценную реализацию, в то время как отношение $||-_F$ оказывается явно недостаточным в обоих указанных аспектах.

4. Построение «ложностной семантики» для интуиционистской логики

Несложно видеть, каким образом можно переформулировать семантику Крипке для интуиционистской логики, используя, в качестве исходного, отношение $||-_f$, понимаемое в духе определения (8). Фальсификационистской моделью Крипке для интуиционистской логики назовем тройку: $\langle W, \leq, ||-_f \rangle$, где W и $\leq$ определяется как и в стандартных моделях Крипке, $||-_f$ есть отношение вынуждения ложности между элементами W и высказываниями языка. Для атомарных высказываний отношение $||-_f$ задается моделью так, чтобы для всякого $a, b \in W$ и для всякого элементарного высказывания p_i, выполнялось условие «обратной сохранности»:

(10) Если $a \, ||-_f \, p_i$ и $b \leq a$, то $b \, ||-_f \, p_i$.

Для сложных высказываний отношение $||-_f$ задается посредством следующих определений:

(11) $a \, ||-_f \, A \wedge B \Leftrightarrow a \, ||-_f \, A$ или $a \, ||-_f \, B$;

[1] Как, например, в семантике для логики конструктивной ложности Нельсона [см., 11, 15], где «истина» и «ложь» изначально вводятся в качестве взаимонеопределяемых значений, а кроме того, условия истинности и ложности логических связок задаются отдельно и независимо друг от друга.

(12) $a \, ||-_f \, A \vee B \Leftrightarrow a \, ||-_f \, A$ и $a \, ||-_f \, B$;

(13) $a \, ||-_f \, {\sim}A \Leftrightarrow \exists b \, (a \leq b$ и $b \, ||+_f \, A)$;

(14) $a \, ||-_f \, A \rightarrow B \Leftrightarrow \exists b \, (a \leq b$ и $b \, ||+_f \, A$ и $b \, ||-_f \, B)$.

Опять-таки, посредством индукции по построению высказываний несложно распространить условие обратной сохранности на все высказывания языка.

Понятия общезначимого высказывания ($\models A$) и отношения логического следования между двумя высказываниями ($A \models B$) можно определить через отношение $||-_f$ следующим образом:

(15) $\models A \Leftrightarrow \forall W \, \forall a \in W \, (a \, ||+_f \, A)$.

(16) $A \models B \Leftrightarrow \forall W \, \forall a \in W \, (a \, ||-_f \, B \Rightarrow a \, ||-_f \, A)$.

Как видим, фальсификационистские модели являются полностью двойственными обычным моделям Крипке для интуиционистской логики. Дуализация соответствующих доказательств непротиворечивости и полноты интуиционистской логики высказываний относительно фальсификационистских моделей представляет собой рутинную процедуру.

В содержательном плане формулировка адекватной семантики для интуиционистской логики исключительно в терминах ложности демонстрирует возможность истолкования этой логики как *логики потенциальной фальсифицируемости*. Такое истолкование полностью соответствует принципу фальсификации Карла Поппера, в смысле требования *потенциальной опровержимости* подлинно научных утверждений.

Если мы попытаемся сформулировать аналогичную семантику, используя в качестве исходного понятия отношение $||-_F$, то сразу же столкнемся с серьезными трудностями. Прежде всего, это касается определения отношения $||-_F$ для сложных высказываний. Возьмем, например, конъюнкцию. Если следовать основной идее определения (9) мы должны отталкиваться от следующей равносильности:

(17) $a \, ||-_F \, A \wedge B \Leftrightarrow a \, ||-_T \, {\sim}(A \wedge B)$.

Принимая во внимание определения (4) и (2), получаем:

(18) $a \, ||-_F \, A \wedge B \Leftrightarrow \forall b \, (a \leq b \Rightarrow (b \, ||+_T \, A$ или $b \, ||+_T \, B))$.

Аналогичным образом получаем определения и для других логических связок:

(19) $a \, ||-_F \, A \vee B \Leftrightarrow \forall b \, (a \leq b \Rightarrow (b \, ||+_T \, A$ и $b \, ||+_T \, B))$;

(20) $a \, ||-_F \, {\sim}A \Leftrightarrow \forall b \, (a \leq b \Rightarrow \exists c \, (b \leq c$ и $c \, ||-_T \, A))$;

(21) $a \Vdash_{-F} A \to B \Leftrightarrow \forall b\,(a \le b \Rightarrow \exists c\,(b \le c$ и $c \Vdash_{-T} A$ и $c \Vdash_{+T} B))$.

Однако в правой части каждого из этих определений задействуется отношение $\Vdash_{-T}$ (пусть даже и с отрицанием), а значит, оказывается, что в таком виде определения формулируются не только в терминах ложности, но и эксплицитно задействуют понятие истины. Заменить же здесь выражение $\Vdash_{+T}$ на $\Vdash_{-F}$ и $\Vdash_{-T}$ на $\Vdash_{+F}$ нельзя, ибо это свидетельствовало бы о явной непоследовательности в истолковании отношения $\Vdash_{-F}$ и о его фактическом отождествлении, в таком случае, с отношением $\Vdash_{-\Gamma}$.

Далее, отношение $\Vdash_{-F}$ для простых высказываний должно определяться так, чтобы выполнялось следующее условие:

(22) $a \Vdash_{-F} p \Leftrightarrow \forall b\,(a \le b \Rightarrow b \Vdash_{+T} p)$.

Опять-таки, в правой части этого условия встречается выражение $\Vdash_{+T}$, которое нельзя заменить на $\Vdash_{-F}$, во-первых, по той же самой причине, которая была отмечена выше, и во-вторых, потому, что, осуществив такую замену, мы попадаем в дурную бесконечность. Таким образом, можно утверждать, что $\Vdash_{-F}$, в отличие от $\Vdash_{-\Gamma}$, не является в полном смысле самостоятельным семантическим отношением (оно обязательно должно сопровождаться отношением $\Vdash_{-T}$) и полноценная дуализация интуиционистской логики на основе этого отношения не представляется возможной.

Более того, отношение $\Vdash_{-F}$ оказывается непригодным и для определения понятия логического закона. В самом деле, в качестве возможного претендента на такое определение может выступать только следующее:

(23) $\models A \Leftrightarrow \forall W\, \forall a \in W\, (a \Vdash_{+F} A)$.

Однако, поскольку отношения $\Vdash_{-T}$ и $\Vdash_{-F}$ не являются взаимодополнительными, то существует такое множество W, такой элемент $a \in W$ и такое высказывание A, для которых не выполняется ни $a \Vdash_{-T} A$, ни $a \Vdash_{-F} A$. Такого рода высказывание, очевидно, подпадает под определение (23), но тем не менее, оно не может быть признано общезначимым с интуиционистской точки зрения, поскольку оно не является конструктивно доказанным.

Итак, рассмотрев возможность построения адекватной семантики для интуиционистской логики на основе понятия ложности, приходим к выводу, что такое построение осуществимо лишь в

том случае, если в качестве представителя указанного понятия принимается отношение $\Vdash_{-\Gamma}$. На наш взгляд, это обстоятельство говорит о том, что именно это отношение адекватно выражает подлинное интуиционистское понятие ложности.

5. Понятие ложности и отношение логического следования в интуиционистской логике

Остается, однако, еще одна возможность. Если отношение $\Vdash_{-F}$ плохо справляется с задачей моделирования интуиционистской ложности как *единственной* основы семантической конструкции, то, возможно, оно подходит на эту роль при условии *совместного* использования в семантике как истины, так и лжи в качестве самостоятельных истинностных значений, которые равно необходимы для семантического построения? Действительно, несмотря на то, что собственно интуиционистская логика не нуждается в параллельном использовании истины и лжи, такая необходимость может возникнуть для решения тех или иных проблем традиционной интуиционистской семантики. В частности, речь идет о проблеме логического следования, которое, как это хорошо известно, имеет в интуиционистской логике «парадоксальный» характер, поскольку для него выполняются так называемые «парадоксы логического следования»:

(24) $A \models B$,

(25) $\sim B \models A$,

где A есть произвольное высказывание, а B есть какой-нибудь закон интуиционистской логики.

Один из наиболее эффективных и хорошо разработаных способов преодоления парадоксов логического следования предоставляет построение семантики по «американскому плану» [см. 4], когда сначала истина и ложь вводятся в семантическую конструкцию независимым образом, а затем допускаются так называемые пресыщенные оценки и истинностно-значные провалы. Такого рода семантическое построение позволяет определить релевантное отношение логического следования, для которого не выполняются «парадоксальные» принципы (24) и (25).

Интересно отметить, что для интуиционистской логики этот подход может быть успешно реализован с использованием отношения $\Vdash_{\mathrm{f}}$. Действительно, определим релевантную интуиционистскую модель как четверку $\langle W, \leq, \Vdash_{\mathrm{T}}, \Vdash_{\mathrm{f}}\rangle$, где W и $\leq$ определяются как и в стандартных интуиционистских моделях, а для $\Vdash_{\mathrm{T}}$ и $\Vdash_{\mathrm{f}}$ выполняются соответственно условия (1) и (10). Для конъюнкции и дизъюнкции принимаются определения (2), (3), (11), (12). Определения для отрицания и импликации слегка модифицируются:

(26) $a \Vdash_{\mathrm{T}} {\sim}A \Leftrightarrow \forall b\, (a \leq b \Rightarrow b \Vdash_{\mathrm{f}} A)$;

(27) $a \Vdash_{\mathrm{f}} {\sim}A \Leftrightarrow \exists b\, (a \leq b$ и $b \Vdash_{\mathrm{T}} A)$;

(28) $a \Vdash_{\mathrm{T}} A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall b\, (a \leq b \Rightarrow (b \Vdash_{\mathrm{f}} A$ или $b \Vdash_{\mathrm{T}} B))$;

(29) $a \Vdash_{\mathrm{f}} A \rightarrow B \Leftrightarrow \exists b\, (a \leq b$ и $b \Vdash_{\mathrm{T}} A$ и $b \Vdash_{\mathrm{f}} B)$.

Важно отметить, что хотя в этих модификациях неявно подразумевается определение (8), но это определение теперь *не* принимается, отношения $\Vdash_{\mathrm{T}}$ и $\Vdash_{\mathrm{f}}$ вводятся в модель как изначально независимые отношения и для них общем случае *не* выполняются следующие условия:

(30) $a \Vdash_{\mathrm{T}} A$ или $a \Vdash_{\mathrm{f}} A$;

(31) $a \nVdash_{\mathrm{T}} A$ или $a \nVdash_{\mathrm{f}} A$.

То есть, говоря неформально, то или иное высказывание вполне может быть теперь одновременно истинным и ложным, или же не истинным и не ложным.

Определение отношения следования остается тем же самым, при этом можно принять (на выбор) любое из двух определений – (7) или (16). Как мы показали в [4] (следуя известному результату Данна для классической релевантной логики), эти два определения при таком построении семантики являются эквивалентными.

Несложно убедиться, что в сформулированных таким образом релевантных интуиционистских моделях «парадоксальные» принципы (24) и (25) не выполняются. Таким образом достигается релевантизация первопорядкового следования для интуиционистской логики [подробнее см. 12, 13 и 4].

Попробуем осуществить аналогичную процедуру, используя вместо $\Vdash_{\mathrm{f}}$ отношение $\Vdash_{\mathrm{F}}$. А именно, рассмотрим сильную интуиционистскую модель, фактически введенную в предыдущем параграфе, которая необходимо задействует оба отношения – как $\Vdash_{\mathrm{T}}$, так и $\Vdash_{\mathrm{F}}$. Эта модель представляет собой четверку $\langle W, \leq, \Vdash_{\mathrm{T}},$

$\Vdash_{\mathrm{F}}\rangle$, где W и $\leq$ определяются как и в стандартных интуиционистских моделях, для $\Vdash_{\mathrm{T}}$ и $\Vdash_{\mathrm{F}}$ выполняются соответственно условия (1) и (22). Для сложных высказываний принимаются определения (2)-(5) и (18)-(21). Заметим, что эти определения не поддаются модификации, аналогичной той, которая была осуществлена для интуиционистских релевантных моделей, поскольку, как было отмечено в предыдущем параграфе, замена выражения $\nVdash_{\mathrm{T}}$ на $\Vdash_{\mathrm{F}}$ и $\Vdash_{\mathrm{T}}$ на $\nVdash_{\mathrm{F}}$ означала бы фактическое отождествление отношений $\Vdash_{\mathrm{F}}$ и $\Vdash_{\mathrm{f}}$.

Нетрудно видеть, что для сильных интуиционистских моделей выполняется следующая лемма, доказательство которой предоставляется любознательному читателю (намек: следует использовать индукцию по построению формулы A):

Лемма. $\forall W\, \forall a \in W\, ((a \Vdash_{\mathrm{F}} A$ и $a \leq b) \Rightarrow b \Vdash_{\mathrm{F}} A)$.

Далее возникает проблема выбора адекватного определения для отношения логического следования. Поступить таким же образом, как и в случае интуиционистских релевантных моделей и оставить определение (7), в данном случае нельзя, поскольку это определение никак не затрагивает отношение $\Vdash_{\mathrm{F}}$, а значит, отношение следования не претерпит никаких изменений. На первый взгляд, кажется довольно естественным рассмотреть следующее определение:

(16) $A \models B \Leftrightarrow \forall W\, \forall a \in W\, (a \Vdash_{\mathrm{F}} B \Rightarrow a \Vdash_{\mathrm{F}} A)$,

Однако несложная проверка показывает, что это определение не только сохраняет общезначимость «парадоксальных» принципов (24) и (25), но и делает общезначимыми ряд интуиционистски неприемлемых принципов, например ${\sim\sim}A \models A$. То есть, определенное таким образом следование, является не только нерелевантным, но и неинтуиционистским. Итак, использование в качестве основы семантической конструкции пары отношений $\Vdash_{\mathrm{T}}$ на $\Vdash_{\mathrm{F}}$ не приводит к сколь-нибудь обоснованной логике интуиционистского типа.

6. Интуиционистские истина и ложь – монизм или дуализм?

В данной статье мы сформулировали и обосновали ряд доводов в пользу тезиса, что в интуиционистской логике ложность высказывания следует рассматривать как его неистинность. На основе истолкованного таким образом понятия можно построить полноценную семантику для интуиционистской логики, а также осуществить релевантизацию интуиционистского отношения логического следования. В то же время, альтернативное понимание ложности как истинности отрицательного высказывания оказывается, в указанном отношении, совершенно неконкурентноспособным. По сути, такое понятие ложности является полностью излишним и оно не способно играть сколь-нибудь весомую роль при построении семантики для той или иной разновидности интуиционистской логики.

Вообще, на наш взгляд, интуционистская логика является типичным представителем логик, которые могут быть охарактеризованы как *двузначные в строгом смысле* и которые, по своему характеру, являются, так сказать, «монистическими». Двузначный характер таких логик опирается на *принцип монизма* какого-то определенного (его обычно называют «выделенным») истинностного значения, и этот монизм находит свое выражение в том, что адекватная семантика для этих логик может быть построена без использования каких-либо других истинностных значений. При этом, в логической семантике традиционно исходят из *монизма истины*, и все, что не является истинным, считается просто ложным. Именно так обычно поступают, формулируя семантики для классической и интуиционистской логик[1].

Как было отмечено выше, такого рода построение может быть полностью дуализировано, в том смысле, что семантику, опирающуюся на монизм истины, можно эквивалентным образом заменить семантикой, основанной на *монизме лжи*, и которая, при этом, будет полностью адекватна исходной логике. Процедура такой дуализации обуславливает возможность перехода к семантикам, которые предполагают дуализм *истины и лжи*. Эти семантики строятся путем формального объединения двух (дуальных) монистических семантик, но при этом истинность и ложность трактуются как равноправные, исходные и неопределяемые друг

[1] Роман Сушко [14] выдвинул тезис, согласно которому, семантику *любой* логики можно редуцировать к некоторой эквивалентной семантике, являющейся монистической в указанном смысле. Тем не менее, в литературе данный тезис подвергался критике и были предложены семантические построения, которые можно считать контрпримером тезису Сушко [см. 16].

через друга понятия. Именно такой подход позволяет релевантизировать отношение следования для целого класса логик, в том числе, классической и интуиционистской.

Сформулируем общие выводы нашего рассмотрения.

1. Понятие ложности является не менее важным семантическим понятием, чем понятие истинности.

2. Подлинное интуиционистское понятие ложности репрезентирует отсутствие конструктивного доказательства, то есть, потенциальную опровержимость высказываний.

3. На основе такого понятия ложности можно построить семантику интуиционистской логики, полностью двойственной семантике, опирающейся на понятие истинности.

4. Совместное использование интуиционистской истины и интуиционистской лжи как независимых и равноправных понятий позволяет преодолеть «парадоксальный» характер отношения следования в интуиционистской логике и сформулировать понятие релевантного интуиционистского следования.

5. Попытка ввести в интуиционистскую семантику понятие ложности, истолковываемое в смысле интуиционистского доказательства отрицательного высказывания, и осуществить на основе этого понятия построения, аналогичные тем, которые описаны в пп. 3 и 4, проваливается и оборачивается типичным случаем «умножения сущностей без необходимости».

Литература

1. *Гейтинг* А. Интуиционизм. Введение. – М.: Мир, 1965.

2. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. – М.: Изд-во Московского университета, 1986.

3. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. – М.: Аспект Пресс, 2000.

4. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal Logical Studies. – 2000. – No. 5.

5. *Brouwer L.E.J.* The effect of intuitionism on classical algebra of logic // Proceedings of the Royal Irish Academy Section A 57. – 1955. – C. 113-116.

6. *Dummett M.* Elements of Intuitionism. – Oxford: Clarendon

Press, 1977.

7. *Gödel K.* Zum intuitionistischen Aussagenkalkül // Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien (Math.-naturwiss. Klasse). – 69. – 1932., с. 65-66.

8. *Grzegorczyk A.*: A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic // Indagationes Mathematicae. – 26. – 1964., с. 596-601.

9. *Jaskowski S.* Recherches sur le système de la logique intuitioniste // Actes du Congrès Internationale de Philosophie Scientifique 1936, vol. 6, Paris, 1936., с. 58–61. [Английский перевод: Studia Logica. – 34. – 1975., с. 117–120.]

10. *Kripke S.A.* Semantical analysis of intuitionistic logic I // Formal systems and recursive functions, ed. by J. N. Crossley and M. A. Dummett. – Amsterdam. – 1965, с. 92-130.

11. *Nelson D.* Constructible falsity // Journal of Symbolic Logic. 1949. Vol. 14. P. 16-26.

12. *Shramko Y.* Intuitionismus und Relevanz. Berlin: Logos-Verlag, 1999.

13. *Shramko Y.* American plan for intuitionistic logic 1: an intuitive background // The Logica Yearbook 1999. Ed. Timothy Childers. Prague: Filosophia, 2000.

14. *Suszko R.* The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920's // Studia
Logica. – 36. – 1977., с. 373-380.

15. *Thomason R.* A semantical study of constructive falsity // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. – 15. – 1969. – С. 247-257.

16. *Wansing H., Shramko Y.* Suszko's Thesis, inferential many-valuedness, and the notion of a logical system // Studia Logica. – 88. – 2008. – С. 405-429.

17. *Wansing H., Shramko Y.* Harmonious many-valued propositional logics and the logic of computer networks // C. Degremont, L. Keiff and H. Rueckert (eds.), Dialogues, Logics and Other Strange Things. Essays in Honour of Shahid Rahman. – College Publications, 2008. – С. 491-516.

Семантическая характеризация паранормальных логик $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $I_{0,3}$,...[1]

The paper deals with the problem of the semantic characterization of the logics $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $I_{0,3}$,... defined in [1]. For an arbitrary positive integer α, we propose the following semantics which are adequate to the logic $I_{0,\alpha}$: $I_{0,\alpha}$-valued semantics and I_0,α-cortege semantics.

Ключевые слова: паранормальная логика,семантическая характеризация, оценочная семантика,кортежная семантика.

Изучается проблема семантической характеризации логик $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $I_{0,3}$,..., определенных в [1]. Для произвольного фиксированного целого положительного числа α строятся адекватные логике $I_{0,\alpha}$ семантики: $I_{0,\alpha}$ – оценочная семантика и $I_{0,\alpha}$ – кортежная семантика.

Язык *L*, исчисления $HI_{0,1}$, $HI_{0,2}$, $HI_{0,3}$,... и логики $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $I_{0,3}$,...

Язык *L*, являющийся языком всех рассматриваемых здесь логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: p_1, p_2, p_3, ...(пропозициональные переменные языка *L*), &, ∨, ⊃ (бинарные логические связки языка *L*), ¬ (унарная логическая связка языка *L*), левая и правая круглые скобки. Определение *L* – формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка *L* есть – формула, (2) если *A* и *B* являются *L* – формулами, то *(A & B)*, *(A ∨ B)*, *(A ⊃ B)*, и *(¬ A)* являются *L* – формулами, (3) ничто другое не является *L* – формулой. Принимаем обычные соглашения об опускании скобок в *L* – формулах и используем «формула» как сокращение для «*L* – формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка *L*. Длиной квазиэлементарной

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-06-00224а.